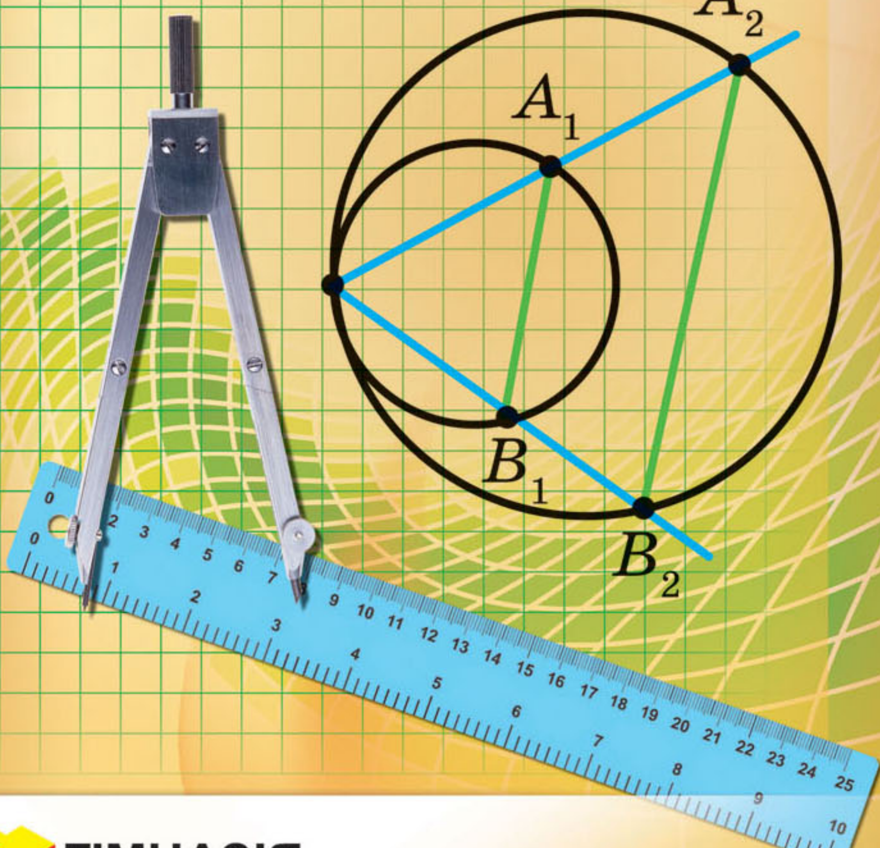
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

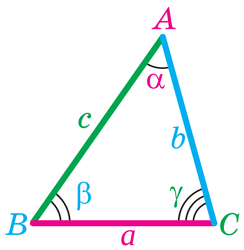
9

Геометрия



ГІМНАЗІЯ

ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ



a, b, c — длины сторон BC, AC, AB соответственно

α, β, γ — величины углов A, B, C соответственно

m_a, m_b, m_c — длины медиан, проведенных из вершин A, B, C соответственно

l_a, l_b, l_c — длины биссектрис, проведенных из вершин A, B, C соответственно

h_a, h_b, h_c — длины высот, проведенных из вершин A, B, C соответственно

r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника соответственно

p — полупериметр треугольника

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РАДИУСОВ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ ТРЕУГОЛЬНИКА

$$r = \frac{S}{p}$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

Координаты середины отрезка

$C(x; y)$ — середина отрезка AB, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Формула расстояния между двумя точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Уравнение прямой

$$ax + by = c, \text{ где } a^2 + b^2 \neq 0$$

Уравнение окружности

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

где $M(a; b)$ — центр окружности, R — радиус окружности

ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

	$\alpha = 0°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 90°$	$\alpha = 180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0

СВОЙСТВА СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

ГЕОМЕТРИЯ

учебник для 9 класса
общеобразовательных учебных заведений
с обучением на русском языке

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины

Харьков
«Гимназия»
2017

УДК 373.167.1:512
М52

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины
(приказ МОН Украины от 20.03.2017 № 417)

Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена

Эксперты, которые проводили экспертизу данного учебника во время проведения конкурсного отбора проектов учебников для 9 класса общеобразовательных учебных заведений и сделали заключение о целесообразности предоставления учебнику грифа «Рекомендовано Министерством образования и науки Украины»:

Л. И. Философ, доцент кафедры алгебры и математического анализа Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки, кандидат физико-математических наук;

О. В. Тесленко, методист методического центра Управления образования администрации Слободского района Харьковского городского совета;

Т. А. Евтушевская, учитель Черкасской общеобразовательной школы I–III ступеней № 7, учитель-методист

Эксперт по антидискриминации в образовании

Н. Н. Дашенкова, доцент кафедры философии, сотрудница ЦГО ХНУРЭ

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрия : учеб. для 9 кл. общеобразоват. учеб. заведений с обуч. на рус. яз. : пер. с укр. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Х. : Гимназия, 2017. — 240 с. : ил.
ISBN 978-966-474-304-1.

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-474-304-1

ОТ АВТОРОВ

Дорогие девятиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучение геометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Хочется верить, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделен на пять параграфов, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Изучая его, особое внимание обращайте на текст, напечатанный **жирным шрифтом**, ***жирным курсивом*** и *курсивом*; так в книге выделены определения, правила и важнейшие математические утверждения.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, приступать к которым мы советуем только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи, особенно отмеченные «звёздочкой» (*). Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме, расположенные в конце каждого параграфа.

Каждый пункт завершается рубрикой «Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные геометрические знания, а лишь здравый смысл, изобретательность и смекалка. Эти задачи полезны, как витамины. Они помогут вам научиться принимать неожиданные и нестандартные решения не только в математике, но и в жизни.

Если после выполнения домашних заданий останется свободное время и вы захотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Уважаемые коллеги!

Мы надеемся, что этот учебник станет надежным помощником в вашем нелегком и благородном труде, и будем искренне рады, если он вам понравится.

В книге собран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет никакой необходимости. Вместе с тем гораздо удобнее работать, когда есть большой запас задач. Это позволит реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

В учебной программе по математике для учащихся 5–9 классов общеобразовательных учебных заведений отмечено: «Содержание учебного материала структурировано по темам соответствующих учебных курсов с определением количества часов на их изучение. Такое распределение содержания и учебного времени является ориентировочным. Учителю и авторам учебников предоставляется право корректировать его в зависимости от принятой методической концепции...».

Учитывая приведенное, мы сочли целесообразным переставить учебный материал некоторых тем в соответствии с авторской концепцией. Это позволяет существенно разнообразить дидактический материал учебника.

Зеленым цветом отмечены номера задач, рекомендуемых для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, которые на усмотрение учителя (с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса) можно решать устно.

Материал рубрики «Когда сделаны уроки» можно использовать для организации работы математического кружка и факультативных занятий.

Желаем творческого вдохновения и терпения.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

n° задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;

$n^{\bullet}$ задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;

$n^{\bullet\bullet}$ задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;

n^{*} задачи для математических кружков и факультативов;

ключевые задачи, результат которых может быть использован для решения других задач;

доказательство теоремы, соответствующее достаточному уровню учебных достижений;

доказательство теоремы, соответствующее высокому уровню учебных достижений;

доказательство теоремы, не обязательное для изучения;

◄ окончание доказательства теоремы, решения задачи;

рубрика «Когда сделаны уроки».

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ §1

В этом параграфе вы узнаете, что представляют собой синус, косинус и тангенс угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Вы научитесь по двум сторонам треугольника и углу между ними находить третью сторону, а также по стороне и двум прилежащим к ней углам находить две другие стороны треугольника.

В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Изучив материал этого параграфа, вы сможете решать любые треугольники.

Вы узнаете новые формулы, с помощью которых можно находить площадь треугольника.

1. Синус, косинус и тангенс угла от 0° до 180°

Понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла вам известны из курса геометрии 8 класса. Расширим эти понятия для произвольного угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

В верхней полуплоскости координатной плоскости рассмотрим полуокружность с центром в начале координат, радиус которой равен 1 (рис. 1.1). Такую полуокружность называют **единичной**.

Будем говорить, что **углу** α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ **соответствует точка** M единичной полуокружности, если $\angle MOA = \alpha$, где точки O и A имеют соответственно координаты (0; 0) и (1; 0) (рис. 1.1). Например, на рисунке 1.1 углу, равному 90°, соответствует точка C; углу, равному 180°, — точка B; углу, равному 0°, — точка A.

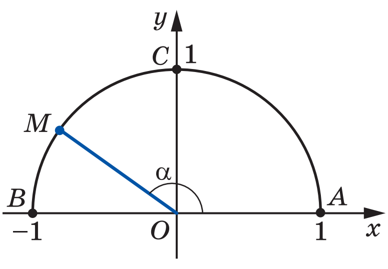


Рис. 1.1

Пусть α — острый угол. Ему соответствует некоторая точка $M\ (x;\ y)$ дуги AC единичной полуокружности (рис. 1.2). В прямоугольном треугольнике OMN имеем:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Поскольку $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то

$$\cos\alpha = x,\ \sin\alpha = y.$$

Итак, косинус и синус острого угла α — это соответственно абсцисса и ордината точки M единичной полуокружности, соответствующей углу α.

Полученный результат подсказывает, как определить синус и косинус произвольного угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

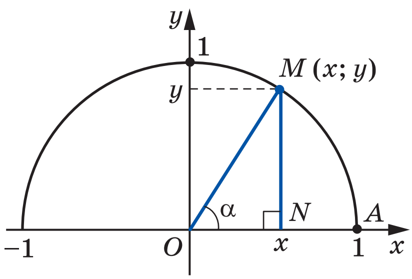


Рис. 1.2

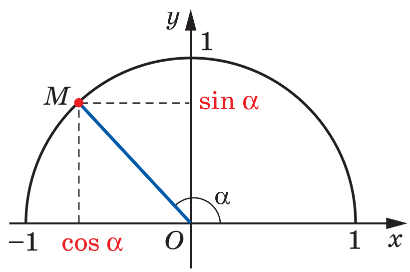


Рис. 1.3

Определение. Косинусом и синусом угла α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) называют соответственно абсциссу и ординату точки M единичной полуокружности, соответствующей углу α (рис. 1.3).

Пользуясь этим определением, можно, например, установить, что $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Если $M\ (x;\ y)$ — произвольная точка единичной полуокружности, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Следовательно, для любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, имеем:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Если α — тупой угол, то абсцисса точки, соответствующей этому углу, отрицательна. Следовательно, косинус тупого угла является отрицательным числом. Справедливо и такое утверждение: если $\cos\alpha < 0$, то α — тупой или развернутый угол.

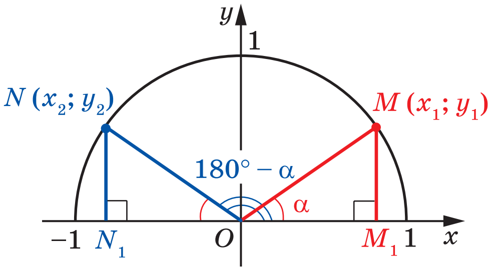


Рис. 1.4

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что для любого острого угла α выполняются равенства:

$$\mathbf{sin}\ (90^\circ-\alpha)=\mathbf{cos}\ \alpha,$$
$$\mathbf{cos}\ (90^\circ-\alpha)=\mathbf{sin}\ \alpha$$

Эти формулы остаются справедливыми также для $\alpha=0^\circ$ и для $\alpha=90^\circ$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть углам α и $180^\circ-\alpha$, где $\alpha\neq 0^\circ$, $\alpha\neq 90^\circ$ и $\alpha\neq 180^\circ$, соответствуют точки $M\ (x_1;\ y_1)$ и $N\ (x_2;\ y_2)$ единичной полуокружности (рис. 1.4).

Прямоугольные треугольники OMM_1 и ONN_1 равны по гипотенузе и острому углу ($OM=ON=1$, $\angle MOM_1=\angle NON_1=\alpha$). Отсюда $y_2=y_1$ и $x_2=-x_1$. Следовательно,

$$\mathbf{sin}\ (180^\circ-\alpha)=\mathbf{sin}\ \alpha,$$
$$\mathbf{cos}\ (180^\circ-\alpha)=-\mathbf{cos}\ \alpha$$

Убедитесь самостоятельно, что эти равенства остаются верными для $\alpha=0^\circ$, $\alpha=90^\circ$, $\alpha=180^\circ$.

Если α — острый угол, то, как вы знаете из курса геометрии 8 класса, справедливо равенство, которое называют **основным тригонометрическим тождеством**:

$$\mathbf{sin}^2\ \alpha+\mathbf{cos}^2\ \alpha=1$$

Это равенство остается верным для $\alpha=0^\circ$, $\alpha=90^\circ$, $\alpha=180^\circ$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть α — тупой угол. Тогда угол $180^\circ-\alpha$ является острым. Имеем:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\sin\ (180^\circ-\alpha))^2+(-\cos\ (180^\circ-\alpha))^2=$$
$$=\sin^2(180^\circ-\alpha)+\cos^2(180^\circ-\alpha)=1.$$

Следовательно, равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выполняется для всех $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Определение. Тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$, называют отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то есть

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Поскольку $\cos 90° = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не определен для $\alpha = 90°$.

Очевидно, что каждому углу α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ соответствует *единственная* точка единичной полуокружности. Значит, каждому углу α соответствует единственное число, которое является значением синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90°$). Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса) от величины угла является функциональной.

Функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, соответствующие этим функциональным зависимостям, называют **тригонометрическими функциями** угла α.

Задача 1. Докажите, что $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$. ◄

Задача 2. Найдите $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$.

Решение. Имеем: $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}.$$ ◄

?

1. Какую полуокружность называют единичной?
2. Поясните, в каком случае говорят, что углу α соответствует точка M единичной полуокружности.
3. Что называют синусом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
4. Что называют косинусом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
5. Чему равен $\sin 0°$, $\cos 0°$, $\sin 90°$, $\cos 90°$, $\sin 180°$, $\cos 180°$?
6. В каких пределах находятся значения $\sin\alpha$, если $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
7. В каких пределах находятся значения $\cos\alpha$, если $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?

8. Каким числом — положительным или отрицательным — является синус острого угла? синус тупого угла? косинус острого угла? косинус тупого угла?

9. Каким углом является угол α, если $\cos\alpha < 0$?

10. Чему равен $\sin(180° - \alpha)$? $\cos(180° - \alpha)$?

11. Как связаны между собой синус и косинус одного и того же угла?

12. Что называют тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$?

13. Почему $\mathrm{tg}\,\alpha$ не определен для $\alpha = 90°$?

14. Какое общее название имеют функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$ и $h(\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1.1.° Начертите единичную полуокружность, взяв в качестве единичного такой отрезок, длина которого в 5 раз больше стороны клетки тетради. Постройте угол, вершиной которого является начало координат, а одной из сторон — положительная полуось оси абсцисс:

1) косинус которого равен $\frac{1}{5}$;
2) косинус которого равен $-0{,}4$;
3) синус которого равен $0{,}6$;
4) синус которого равен 1;
5) косинус которого равен 0;
6) косинус которого равен -1.

УПРАЖНЕНИЯ

1.2.° Чему равен:

1) $\sin(180° - \alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$;
2) $\cos(180° - \alpha)$, если $\cos\alpha = 0{,}7$;
3) $\cos(180° - \alpha)$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{9}$;
4) $\mathrm{tg}(180° - \alpha)$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = -5$?

1.3.° Углы α и β смежные, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Найдите $\cos\beta$.
2) Какой из углов α и β является острым, а какой — тупым?

1.4.° Найдите значение выражения:

1) $2\sin 90° + 3\cos 0°$;
2) $3\sin 0° - 5\cos 180°$;
3) $\mathrm{tg}\,23° \cdot \mathrm{tg}\,0° \cdot \mathrm{tg}\,106°$;
4) $6\,\mathrm{tg}\,180° + 5\sin 180°$;

5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$; 6) $\dfrac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

1.5.° Вычислите:
1) $4 \cos 90° + 2 \cos 180° - \operatorname{tg} 180°$;
2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90°$.

1.6.° Чему равен синус угла, если его косинус равен: 1) 1; 2) 0?

1.7.° Чему равен косинус угла, если его синус равен: 1) 1; 2) 0?

1.8.° Найдите $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\operatorname{tg} 135°$.

1.9.° Найдите $\sin 150°$, $\cos 150°$, $\operatorname{tg} 150°$.

1.10.° Существует ли угол α, для которого:
1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$; 3) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$; 5) $\cos\alpha = 1{,}001$;
2) $\sin\alpha = 0{,}3$; 4) $\cos\alpha = -0{,}99$; 6) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$?

1.11.• Найдите:
1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;
2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;
3) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$;
4) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$;
5) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

1.12.• Найдите:
1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$;
2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{6}$;
3) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

1.13.• Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):
1) косинус острого угла больше косинуса тупого угла;
2) существует тупой угол, синус и косинус которого равны;
3) существует угол, синус и косинус которого равны нулю;
4) косинус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;
5) синус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;

6) косинус угла треугольника может быть равным нулю;
7) синус угла треугольника может быть равным нулю;
8) косинус угла треугольника может быть равным -1;
9) синус угла треугольника может быть равным 1;
10) синус угла, отличного от прямого, меньше синуса прямого угла;
11) косинус развернутого угла меньше косинуса угла, отличного от развернутого;
12) синусы смежных углов равны;
13) косинусы неравных смежных углов являются противоположными числами;
14) если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы;
15) если синусы двух углов равны, то равны и сами углы;
16) тангенс острого угла больше тангенса тупого угла?

1.14.° Сравните с нулем значение выражения:
1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$.

1.15.° Найдите значение выражения:
1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $2 \cos^2 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$.

1.16.° Чему равно значение выражения:
1) $2 \sin 150° - 4 \cos 120°$;
2) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

1.17.° Найдите значение выражения, не пользуясь калькулятором:
1) $\dfrac{\sin 18°}{\sin 162°}$; 2) $\dfrac{\cos 18°}{\cos 162°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$.

1.18.° Найдите значение выражения, не пользуясь калькулятором:
1) $\dfrac{\sin 28°}{\sin 152°}$; 2) $\dfrac{\cos 49°}{\cos 131°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 14°}{\operatorname{tg} 166°}$.

1.19.° Найдите сумму квадратов синусов всех углов прямоугольного треугольника.

1.20.° Найдите сумму квадратов косинусов всех углов прямоугольного треугольника.

1.21.° В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 60°$, точка O — центр вписанной окружности. Чему равен косинус угла AOC?

1.22.° Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $\cos \angle BOC = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол A треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1.23. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна 5 см и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма равен 30°. Найдите диагональ параллелограмма, проведенную из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами параллелограмма.

1.24. Прямая CE параллельна боковой стороне AB трапеции $ABCD$ и делит основание AD на отрезки AE и DE такие, что $AE = 7$ см, $DE = 10$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

1.25. Две стороны треугольника равны 8 см и 11 см. Может ли угол, противолежащий стороне длиной 8 см, быть: 1) тупым; 2) прямым? Ответ обоснуйте.

1.26. В треугольнике ABC проведена высота BD, $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $AB = 10$ см. Найдите сторону BC.

1.27. Найдите высоту BD треугольника ABC и проекцию стороны AB на прямую AC, если $\angle BAC = 150°$, $AB = 12$ см.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

1.28. Покажите, что любой треугольник можно разрезать на 3 части так, что из полученных частей можно сложить прямоугольник.

2. Теорема косинусов

Из первого признака равенства треугольников следует, что две стороны и угол между ними однозначно определяют треугольник. А значит, по указанным элементам можно, например, найти третью сторону треугольника. Как это сделать, показывает следующая теорема.

Теорема 2.1 (теорема косинусов). ***Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.***

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, например, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Возможны три случая:

1) угол A острый;

2) угол A тупой;

3) угол A прямой.

Первый случай. Пусть угол A острый. Тогда хотя бы один из углов B или C является острым.

• Пусть $\angle C < 90°$. Проведем высоту BD. Она будет полностью принадлежать треугольнику ABC (рис. 2.1).

В прямоугольном треугольнике ABD:

$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A.$$

В прямоугольном треугольнике BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$

$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$

$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

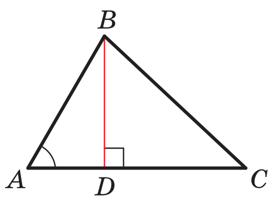


Рис. 2.1

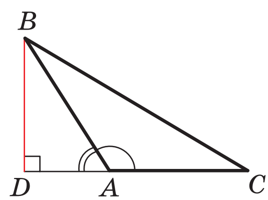


Рис. 2.2

• Пусть $\angle B < 90°$. Проведем высоту треугольника ABC из вершины C. Она будет полностью принадлежать треугольнику ABC. Доказательство для этого случая аналогично рассмотренному. Проведите его самостоятельно.

Второй случай. Пусть угол A тупой. Проведем высоту BD треугольника ABC (рис. 2.2).

В прямоугольном треугольнике ABD: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$

$$= AB \cdot \sin(180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC,$$

$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos(180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

В прямоугольном треугольнике BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$$

Третий случай. Пусть угол A прямой (рис. 2.3). Тогда $\cos A=0$. Надо доказать, что $BC^2=AB^2+AC^2$. Это равенство следует из теоремы Пифагора для треугольника ABC. ◀

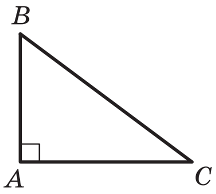


Рис. 2.3

Доказательство теоремы косинусов показывает, что *теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов, а теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора*.

Если воспользоваться обозначениями для длин сторон и величин углов треугольника ABC (см. форзац), то, например, для стороны, длина которой равна a, можно записать:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$$

С помощью теоремы косинусов, зная три стороны треугольника, можно определить, является ли он остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

Теорема 2.2 (следствие из теоремы косинусов). ***Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, причем a — длина его наибольшей стороны. Если $a^2<b^2+c^2$, то треугольник является остроугольным. Если $a^2>b^2+c^2$, то треугольник является тупоугольным. Если $a^2=b^2+c^2$, то треугольник является прямоугольным.***

Доказательство. По теореме косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Отсюда $2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$.

Пусть $a^2<b^2+c^2$. Тогда $b^2+c^2-a^2>0$. Отсюда $2bc\cos\alpha>0$, то есть $\cos\alpha>0$. Поэтому угол α острый.

Поскольку a — длина наибольшей стороны треугольника, то против этой стороны лежит наибольший угол, который, как мы доказали, является острым. Следовательно, в этом случае треугольник является остроугольным.

Пусть $a^2>b^2+c^2$. Тогда $b^2+c^2-a^2<0$. Отсюда $2bc\cos\alpha<0$, то есть $\cos\alpha<0$. Поэтому угол α тупой. Следовательно, в этом случае треугольник является тупоугольным.

Пусть $a^2=b^2+c^2$. Тогда $2bc\cos\alpha=0$. Отсюда $\cos\alpha=0$. Следовательно, $\alpha=90°$. В этом случае треугольник является прямоугольным. ◀

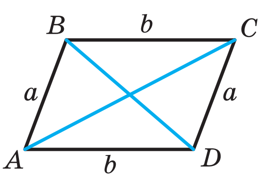


Рис. 2.4

Задача 1. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Решение. На рисунке 2.4 изображен параллелограмм $ABCD$. Пусть $AB=CD=a$, $BC=AD=b$, $\angle BAD=\alpha$, тогда $\angle ADC=180^\circ-\alpha$. Из треугольника ABD по теореме косинусов получаем:

$$BD^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha. \quad (1)$$

Из треугольника ACD по теореме косинусов получаем:

$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha)$. Отсюда

$$AC^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha. \quad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), получим:

$$BD^2+AC^2=2a^2+2b^2.$$ ◀

Задача 2. В треугольнике ABC сторона AB на 4 см больше стороны BC, $\angle B=120^\circ$, $AC=14$ см. Найдите стороны AB и BC.

Решение. По теореме косинусов

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B.$$

Пусть $BC=x$ см, $x>0$, тогда $AB=(x+4)$ см.

Имеем:

$$14^2=(x+4)^2+x^2-2x(x+4)\cos 120^\circ;$$

$$196=x^2+8x+16+x^2-2x(x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196=2x^2+8x+16+x(x+4);$$

$$3x^2+12x-180=0;$$

$$x^2+4x-60=0;$$

$$x_1=6;\ x_2=-10.$$

Корень -10 не удовлетворяет условию $x>0$.

Следовательно, $BC=6$ см, $AB=10$ см.

Ответ: 10 см, 6 см. ◀

Задача 3. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD:AD=1:2$. Найдите отрезок BD, если $AB=14$ см, $BC=13$ см, $AC=15$ см.

Решение. По теореме косинусов из треугольника ABC (рис. 2.5) получаем:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C.$$

Отсюда $\cos C=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=$

$$=\frac{15^2+13^2-14^2}{2\cdot15\cdot13}=\frac{225+169-196}{2\cdot15\cdot13}=\frac{33}{65}.$$

Поскольку $CD:AD=1:2$, то

$$CD=\frac{1}{3}AC=5\ \text{(см)}.$$

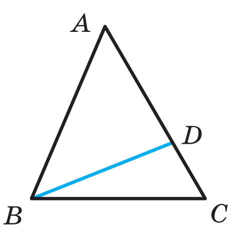


Рис. 2.5

Тогда из треугольника BCD получаем:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Следовательно, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $8\sqrt{2}$ см. ◄

Задача 4. Две стороны треугольника равны 23 см и 30 см, а медиана, проведенная к большей из известных сторон, — 10 см. Найдите третью сторону треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC известно, что $AC = 23$ см, $BC = 30$ см, отрезок AM — медиана, $AM = 10$ см.

На продолжении отрезка AM за точку M отложим отрезок MD, равный медиане AM (рис. 2.6). Тогда $AD = 20$ см.

В четырехугольнике $ABDC$ диагонали AD и BC точкой M пересечения делятся пополам ($BM = MC$ по условию, $AM = MD$ по построению). Следовательно, четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм.

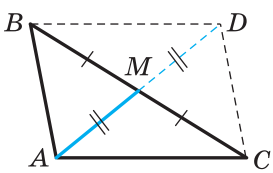


Рис. 2.6

Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон (см. ключевую задачу 1), то

$$AD^2 + BC^2 = 2\,(AB^2 + AC^2).$$

Тогда

$$20^2 + 30^2 = 2\,(AB^2 + 23^2);$$
$$400 + 900 = 2\,(AB^2 + 529);$$
$$AB^2 = 121;$$
$$AB = 11 \text{ см}.$$

Ответ: 11 см. ◄

1. Сформулируйте теорему косинусов.
2. Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник со сторонами a, b и c, где a — длина его наибольшей стороны, если: 1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 > b^2 + c^2$; 3) $a^2 = b^2 + c^2$?
3. Как связаны между собой диагонали и стороны параллелограмма?

УПРАЖНЕНИЯ

2.1.° Найдите неизвестную сторону треугольника ABC, если:
1) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;
2) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$.

2.2.° Найдите неизвестную сторону треугольника DEF, если:
1) $DE=4$ см, $DF=2\sqrt{3}$ см, $\angle D=30°$;
2) $DF=3$ см, $EF=5$ см, $\angle F=120°$.

2.3.° Стороны треугольника равны 12 см, 20 см и 28 см. Найдите наибольший угол треугольника.

2.4.° Стороны треугольника равны $\sqrt{18}$ см, 5 см и 7 см. Найдите средний по величине угол треугольника.

2.5.° Установите, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны:
1) 5 см, 7 см и 9 см;
2) 5 см, 12 см и 13 см;
3) 10 см, 15 см и 18 см.

2.6.° Стороны треугольника равны 7 см, 8 см и 12 см. Является ли данный треугольник остроугольным?

2.7.° Докажите, что треугольник со сторонами 8 см, 15 см и 17 см является прямоугольным.

2.8.° Стороны параллелограмма равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см, а один из углов равен 45°. Найдите диагонали параллелограмма.

2.9.° В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $BC=3$ см, $AD=10$ см, $CD=4$ см, $\angle D=60°$. Найдите диагонали трапеции.

2.10.° На стороне AB равностороннего треугольника ABC отметили точку D так, что $AD : DB=2 : 1$. Найдите отрезок CD, если $AB=6$ см.

2.11.° На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : BM=1 : 3$. Найдите отрезок CM, если $AC=BC=4$ см.

2.12.• Две стороны треугольника равны 3 см и 4 см, а синус угла между ними равен $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?

2.13.• В треугольнике ABC известно, что $\angle C=90°$, $AC=20$ см, $BC=15$ см. На стороне AB отметили точку M так, что $BM=4$ см. Найдите отрезок CM.

2.14.• На продолжении гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC за точку B отметили точку D так, что $BD=BC$. Найдите отрезок CD, если катет треугольника ABC равен a.

2.15.• В треугольнике ABC известно, что $\angle C=90°$, $AB=13$ см, $AC=12$ см. На продолжении гипотенузы AB за точку B отметили точку D так, что $BD=26$ см. Найдите отрезок CD.

2.16.$^{\bullet}$ Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, находится на расстояниях a и b от концов гипотенузы. Найдите гипотенузу треугольника.

2.17.$^{\bullet}$ Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $BC=a$, $AC=b$, $\angle AOB=120°$. Найдите сторону AB.

2.18.$^{\bullet}$ Две стороны треугольника, угол между которыми равен $60°$, относятся как $5:8$, а третья сторона равна 21 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

2.19.$^{\bullet}$ Две стороны треугольника относятся как $1:2\sqrt{3}$ и образуют угол, величина которого составляет $30°$. Третья сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

2.20.$^{\bullet}$ Сумма двух сторон треугольника, образующих угол величиной $120°$, равна 8 см, а длина третьей стороны — 7 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

2.21.$^{\bullet}$ Две стороны треугольника, угол между которыми равен $120°$, относятся как $5:3$. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 30 см.

2.22.$^{\bullet}$ Две стороны треугольника равны 16 см и 14 см, а угол, противолежащий меньшей из известных сторон, равен $60°$. Найдите неизвестную сторону треугольника.

2.23.$^{\bullet}$ Две стороны треугольника равны 15 см и 35 см, а угол, противолежащий большей из известных сторон, равен $120°$. Найдите периметр треугольника.

2.24.$^{\bullet}$ На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD=14$ см. Найдите отрезок AD, если $AB=37$ см, $BC=44$ см и $AC=15$ см.

2.25.$^{\bullet}$ На стороне AB треугольника ABC отметили точку K, а на продолжении стороны BC за точку C — точку M. Найдите отрезок MK, если $AB=15$ см, $BC=7$ см, $AC=13$ см, $AK=8$ см, $MC=3$ см.

2.26.$^{\bullet}$ Одна из сторон треугольника в 2 раза больше другой, а угол между этими сторонами составляет $60°$. Докажите, что данный треугольник является прямоугольным.

2.27.$^{\bullet}$ Докажите, что если квадрат стороны треугольника равен неполному квадрату суммы двух других сторон, то противолежащий этой стороне угол равен $120°$.

2.28.$^{\bullet}$ Докажите, что если квадрат стороны треугольника равен неполному квадрату разности двух других сторон, то противолежащий этой стороне угол равен $60°$.

2.29.$^{\bullet}$ Две стороны параллелограмма равны 7 см и 11 см, а одна из диагоналей — 12 см. Найдите другую диагональ параллелограмма.

2.30.$^{\bullet}$ Диагонали параллелограмма равны 13 см и 11 см, а одна из сторон — 9 см. Найдите периметр параллелограмма.

2.31.$^{\bullet}$ Диагонали параллелограмма равны 8 см и 14 см, а одна из сторон на 2 см больше другой. Найдите стороны параллелограмма.

2.32.$^{\bullet}$ Стороны параллелограмма равны 11 см и 23 см, а его диагонали относятся как 2 : 3. Найдите диагонали параллелограмма.

2.33.$^{\bullet\bullet}$ В трапеции $ABCD$ известно, что $AD \parallel BC$, $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AD = 16$ см, $\cos A = \frac{1}{7}$. Найдите сторону CD трапеции.

2.34.$^{\bullet\bullet}$ В трапеции $ABCD$ известно, что $AD \parallel BC$, $AB = \sqrt{15}$ см, $BC = 6$ см, $CD = 4$ см, $AD = 11$ см. Найдите косинус угла D трапеции.

2.35.$^{\bullet\bullet}$ Найдите диагональ AC четырехугольника $ABCD$, если около него можно описать окружность и $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

2.36.$^{\bullet\bullet}$ Можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, если $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $BD = 6$ см и $\angle C = 30°$?

2.37.$^{\bullet\bullet}$ Докажите, что против большего угла параллелограмма лежит бóльшая диагональ. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

2.38.$^{\bullet\bullet}$ Стороны треугольника равны 12 см, 15 см и 18 см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины его наибольшего угла.

2.39.$^{\bullet\bullet}$ Основание равнобедренного треугольника равно 5 см, а боковая сторона — 20 см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины угла при его основании.

2.40.$^{\bullet\bullet}$ Стороны треугольника равны 16 см, 18 см и 26 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к его большей стороне.

2.41.$^{\bullet\bullet}$ Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана, проведенная к боковой стороне, — 5 см. Найдите боковую сторону треугольника.

2.42.$^{\bullet\bullet}$ Две стороны треугольника равны 12 см и 14 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 7 см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

2.43.•• В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. На продолжении отрезка AB за точку B отметили точку D так, что $BD = 2AB$. Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.

2.44.•• Докажите, что в треугольнике со сторонами a, b и c выполняется равенство $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где m_c — медиана треугольника, проведенная к стороне, длина которой равна c.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

2.45. В окружности проведены диаметр AC и хорда AB, равная радиусу окружности. Найдите углы треугольника ABC.

2.46. Один из углов, образовавшихся при пересечении биссектрисы угла параллелограмма с его стороной, равен одному из углов параллелограмма. Найдите углы параллелограмма.

2.47. В треугольник ABC вписан параллелограмм $ADEF$ так, что угол A у них общий, а точки D, E и F принадлежат соответственно сторонам AB, BC и AC треугольника. Найдите стороны параллелограмма $ADEF$, если $AB = 8$ см, $AC = 12$ см, $AD : AF = 2 : 3$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

2.48. Найдите угол ADC (рис. 2.7), если $\angle ABC = 140°$.

2.49. Найдите угол ABC (рис. 2.8), если $\angle ADC = 43°$.

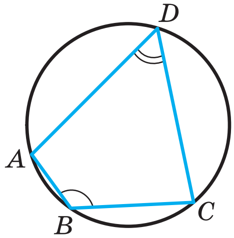


Рис. 2.7

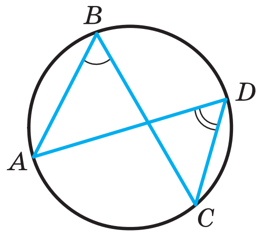


Рис. 2.8

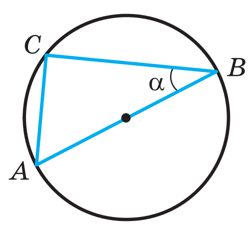


Рис. 2.9

2.50. Отрезок AB — диаметр окружности, радиус которой равен R, $\angle ABC = \alpha$ (рис. 2.9). Найдите хорду AC.

3. Теорема синусов

При доказательстве ряда теорем и решении многих задач применяют следующую лемму.

Лемма. ***Хорда окружности равна произведению диаметра и синуса любого вписанного угла, опирающегося на эту хорду.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 3.1 отрезок MN — хорда окружности с центром в точке O. Проведем диаметр MP. Тогда $\angle MNP = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Пусть величина вписанного угла MPN равна α. Тогда из прямоугольного треугольника MPN получаем:

$$MN = MP \sin \alpha. \qquad (1)$$

Все вписанные углы, опирающиеся на хорду MN, равны α или $180° - \alpha$. Следовательно, их синусы равны. Поэтому полученное равенство (1) справедливо для всех вписанных углов, опирающихся на хорду MN. ◀

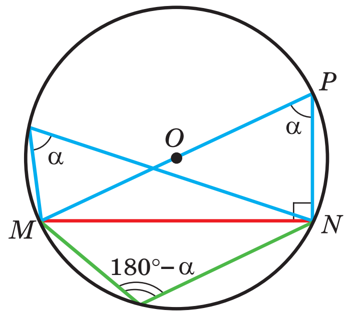


Рис. 3.1

Из второго признака равенства треугольников следует, что сторона и два прилежащих к ней угла однозначно определяют треугольник. Следовательно, по указанным элементам можно найти две другие стороны треугольника. Как это сделать, подсказывает следующая теорема.

Теорема 3.1 (теорема синусов). ***Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.***

Доказательство. ⊙ Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Пусть радиус описанной окружности треугольника ABC равен R. Тогда согласно лемме $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Отсюда

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$ ◀

Следствие. ***Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формуле***

$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin\alpha},}$$

где a — длина стороны треугольника, α ***— величина противолежащего этой стороне угла.***

Задача 1. В треугольнике ABC известно, что $AC=\sqrt{2}$ см, $BC=1$ см, $\angle B=45°$. Найдите угол A.

Решение. По теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Тогда

$$\sin A = \frac{BC\sin B}{AC} = \frac{1\cdot\sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $BC<AC$, то $\angle A<\angle B$. Следовательно, угол A — острый. Отсюда, учитывая, что $\sin A = \frac{1}{2}$, получаем: $\angle A=30°$.

Ответ: 30°. ◀

Задача 2. В треугольнике ABC известно, что $AC=\sqrt{2}$ см, $BC=1$ см, $\angle A=30°$. Найдите угол B.

Решение. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Тогда

$$\sin B = \frac{AC\sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поскольку $BC<AC$, то $\angle A<\angle B$. Тогда угол B может быть как острым, так и тупым. Отсюда $\angle B=45°$ или $\angle B=180°-45°=135°$.

Ответ: 45° или 135°. ◀

Задача 3. На стороне AB треугольника ABC отметили точку D так, что $\angle BDC=\gamma$, $AD=m$ (рис. 3.2). Найдите отрезок BD, если $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$.

Решение. Угол BDC — внешний угол треугольника ADC. Тогда $\angle ACD+\angle A=\angle BDC$, отсюда $\angle ACD=\gamma-\alpha$.

Из треугольника ADC по теореме синусов получаем:

$$\frac{CD}{\sin\angle CAD} = \frac{AD}{\sin\angle ACD}.$$

Следовательно,

$$CD = \frac{AD \sin \angle CAD}{\sin \angle ACD} = \frac{m \sin \alpha}{\sin (\gamma - \alpha)}.$$

Из треугольника BCD по теореме синусов получаем:

$$\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}.$$

Следовательно,

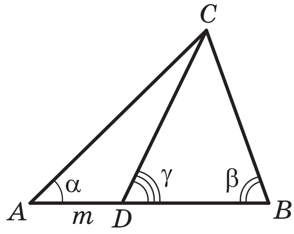


Рис. 3.2

$$BD = \frac{CD \sin \angle BCD}{\sin \angle CBD} = \frac{m \sin \alpha \sin (180^\circ - (\beta + \gamma))}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)} = \frac{m \sin \alpha \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)}.$$

Ответ: $\frac{m \sin \alpha \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)}$. ◄

Задача 4. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ (рис. 3.3). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если радиус окружности, описанной около треугольника BDC, равен $8\sqrt{6}$ см.

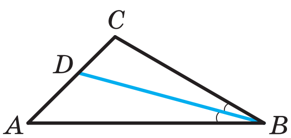


Рис. 3.3

Решение. Пусть R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника BDC, $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

Поскольку отрезок BD — биссектриса треугольника, то $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 15^\circ$.

Из треугольника BDC получаем:

$$\angle BDC = 180^\circ - (\angle CBD + \angle C) = 180^\circ - (15^\circ + 105^\circ) = 60^\circ.$$

По следствию из теоремы синусов $\frac{BC}{2 \sin \angle BDC} = R_1$. Отсюда

$$BC = 2R_1 \sin \angle BDC = 2 \cdot 8\sqrt{6} \sin 60^\circ = 24\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Из треугольника ABC получаем:

$$\angle A = 180^\circ - (\angle ABC + \angle C) = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ.$$

Пусть R — искомый радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Тогда $\frac{BC}{2 \sin A} = R$, отсюда

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{24\sqrt{2}}{2 \sin 45^\circ} = 24 \text{ (см)}.$$

Ответ: 24 см. ◄

1. Как найти хорду окружности, если известны диаметр окружности и вписанный угол, опирающийся на эту хорду?
2. Сформулируйте теорему синусов.
3. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника со стороной a и противолежащим этой стороне углом α?

УПРАЖНЕНИЯ

3.1.° Найдите сторону BC треугольника ABC, изображенного на рисунке 3.4 (длина отрезка дана в сантиметрах).

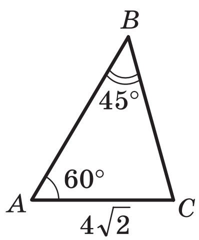


Рис. 3.4

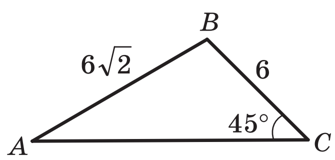


Рис. 3.5

3.2.° Найдите угол A треугольника ABC, изображенного на рисунке 3.5 (длины отрезков даны в сантиметрах).

3.3.° Найдите сторону AB треугольника ABC, если $AC=\sqrt{6}$ см, $\angle B=120°$, $\angle C=45°$.

3.4.° В треугольнике ABC известно, что $AB=12$ см, $BC=10$ см, $\sin A=0{,}2$. Найдите синус угла C треугольника.

3.5.° В треугольнике DEF известно, что $DE=16$ см, $\angle F=50°$, $\angle D=38°$. Найдите сторону EF.

3.6.° В треугольнике MKP известно, что $KP=8$ см, $\angle K=106°$, $\angle P=32°$. Найдите сторону MP.

3.7.° Для нахождения расстояния от точки A до колокольни B, расположенной на другом берегу речки (рис. 3.6), с помощью вех, рулетки и прибора для измерения углов (теодолита) отметили на местности точку C такую, что $\angle BAC=42°$, $\angle ACB=64°$, $AC=20$ м. Как найти расстояние от точки A до колокольни B? Найдите это расстояние.

Рис. 3.6

3.8.° В треугольнике ABC известно, что $BC=a$, $\angle A=\alpha$, $\angle C=\gamma$. Найдите стороны AB и AC.

3.9.° Диагональ параллелограмма равна d и образует с его сторонами углы α и β. Найдите стороны параллелограмма.

3.10.° Найдите угол A треугольника ABC, если:
1) $AC=2$ см, $BC=1$ см, $\angle B=135°$;
2) $AC=\sqrt{2}$ см, $BC=\sqrt{3}$ см, $\angle B=45°$.
Сколько решений в каждом случае имеет задача? Ответ обоснуйте.

3.11.° Существует ли треугольник ABC такой, что $\sin A=0{,}4$, $AC=18$ см, $BC=6$ см? Ответ обоснуйте.

3.12.° В треугольнике DEF известно, что $DE=8$ см, $\sin F=0{,}16$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника DEF.

3,13.° Радиус окружности, описанной около треугольника MKP, равен 5 см, $\sin M=0{,}7$. Найдите сторону KP.

3.14.• На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B отметили точку D. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACD, если $\angle ABC=60°$, $\angle ADC=45°$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4 см.

3.15.• Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AOC, где O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, если $\angle ABC=60°$.

3.16.• Используя данные рисунка 3.7, найдите отрезок AD, если $CD=a$, $\angle BAC=\gamma$, $\angle DBA=\beta$.

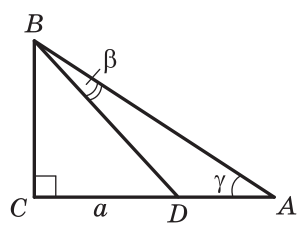


Рис. 3.7

3.17.$^{\bullet}$ Используя данные рисунка 3.8, найдите отрезок AC, если $BD=m$, $\angle ABC=\alpha$, $\angle ADC=\beta$.

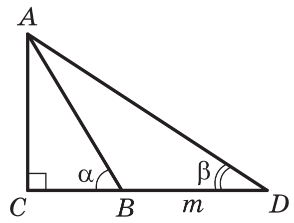


Рис. 3.8

3.18.$^{\bullet}$ На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $\angle AMC=\varphi$. Найдите отрезок CM, если $AB=c$, $\angle A=\alpha$, $\angle ACB=\gamma$.

3.19.$^{\bullet}$ В треугольнике ABC известно, что $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$. На стороне BC отметили точку D так, что $\angle ADB=\varphi$, $AD=m$. Найдите сторону BC.

3.20.$^{\bullet}$ Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых обратно пропорциональны синусам прилежащих к этой стороне углов.

3.21.$^{\bullet}$ Две стороны треугольника равны 6 см и 12 см, а высота, проведенная к третьей стороне, — 4 см. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

3.22.$^{\bullet}$ Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 16 см и боковой стороной 10 см.

3.23.$^{\bullet}$ Сторона треугольника равна 24 см, а радиус описанной окружности — $8\sqrt{3}$ см. Чему равен угол треугольника, противолежащий данной стороне?

3.24.$^{\bullet}$ Трасса для велосипедистов имеет форму треугольника, два угла которого равны 50° и 100°. Меньшую сторону этого треугольника один из велосипедистов проезжает за 1 ч. За какое время он проедет всю трассу? Ответ представьте в часах, округлив его до десятых.

3.25.$^{\bullet\bullet}$ В треугольнике ABC известно, что $AC=b$, $\angle A=\alpha$, $\angle C=\gamma$. Найдите биссектрису BD треугольника.

3.26.$^{\bullet\bullet}$ Основание равнобедренного треугольника равно a, противолежащий ему угол равен α. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины угла при основании.

3.27.$^{\bullet\bullet}$ Докажите, пользуясь теоремой синусов, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых пропорциональны прилежащим сторонам[1].

[1] Напомним, что это утверждение с использованием теоремы о пропорциональных отрезках было доказано в учебнике: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Геометрия: учеб. для 8 кл. общеобр. учеб. заведений. — Х. : Гимназия, 2016. Далее будем ссылаться на этот учебник так: «Геометрия. 8 класс».

3.28.•• Основания равнобокой трапеции равны 9 см и 21 см, а высота — 8 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

3.29.•• Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая сторону AC в точке E, причем $AE = a$. Найдите отрезок CE.

3.30.•• Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите стороны AB и AC.

3.31.•• Медиана CD треугольника ABC образует со сторонами AC и BC углы α и β соответственно, $BC = a$. Найдите медиану CD.

3.32.•• Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB, BHC, AHC и ABC, равны.

3.33.•• Дороги, соединяющие села A, B и C (рис. 3.9), образуют треугольник, причем дорога из села A в село C заасфальтирована, а дороги из села A в село B и из села B в село C — грунтовые. Дороги, ведущие из села A в села B и C, образуют угол, величина которого 15°, а дороги, ведущие из села B в села A и C, — угол, величина которого 5°. Скорость движения автомобиля по асфальтированной дороге в 2 раза больше скорости движения по грунтовой. Какой маршрут надо выбрать водителю автомобиля, чтобы как можно скорее добраться из села A в село B?

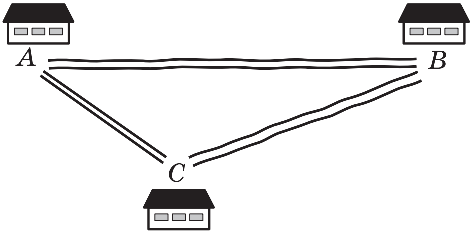


Рис. 3.9

3.34.•• Дороги из сел A и B сходятся у развилки C (рис. 3.10). Дорога из села A до развилки образует с дорогой из села A в село B угол, величина которого 30°, а дорога из села B до развилки образует с дорогой из села B в село A угол, величина которого 70°. Одновременно из села A в направлении развилки выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч, а из села B — автобус со скоростью 60 км/ч. Кто из них первым доедет до развилки?

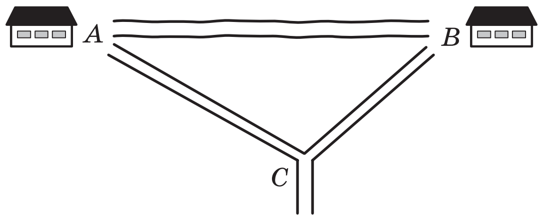


Рис. 3.10

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

3.35. Биссектрисы углов B и C прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD в точках M и K соответственно. Докажите, что $BM = CK$.

3.36. На рисунке 3.11 $DE \parallel AC$, $FK \parallel AB$. Укажите, какие треугольники на этом рисунке подобны.

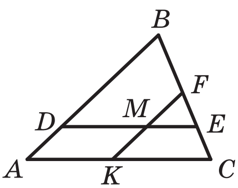


Рис. 3.11

3.37. На стороне AB квадрата $ABCD$ отметили точку K, а на стороне CD — точку M так, что $AK : KB = 1 : 2$, $DM : MC = 3 : 1$. Найдите сторону квадрата, если $MK = 13$ см.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

3.38. Решите прямоугольный треугольник:

1) по двум катетам $a = 7$ см и $b = 35$ см;
2) по гипотенузе $c = 17$ см и катету $a = 8$ см;
3) по гипотенузе $c = 4$ см и острому углу $\alpha = 50°$;
4) по катету $a = 8$ см и противолежащему углу $\alpha = 42°$.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

3.39. В окружность радиуса 1 см вписан пятиугольник. Докажите, что сумма длин его сторон и диагоналей меньше 17 см.

4. Решение треугольников

Решить треугольник — это значит найти неизвестные его стороны и углы по известным сторонам и углам[1].

В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Теоремы косинусов и синусов позволяют решить любой треугольник.

В следующих задачах значения тригонометрических функций будем находить с помощью калькулятора и округлять эти значения до сотых. Величины углов будем находить с помощью калькулятора и округлять эти значения до единиц. Вычисляя длины сторон, результат будем округлять до десятых.

Задача 1. Решите треугольник (рис. 4.1) по стороне $a=12$ см и двум углам $\beta=36°$, $\gamma=119°$.

Решение. Используя теорему о сумме углов треугольника, получаем: $\alpha=180°-(\beta+\gamma)=180°-155°=25°$.

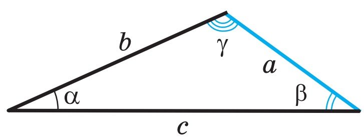


Рис. 4.1

По теореме синусов $\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Отсюда $b=\dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Имеем: $b=\dfrac{12\sin 36°}{\sin 25°}\approx\dfrac{12\cdot 0{,}59}{0{,}42}\approx 16{,}9$ (см).

Вновь применяя теорему синусов, запишем:

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}.$$

Отсюда $c=\dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Имеем:

$$c=\frac{12\sin 119°}{\sin 25°}=\frac{12\sin 61°}{\sin 25°}\approx\frac{12\cdot 0{,}87}{0{,}42}\approx 24{,}9 \text{ (см)}.$$

Ответ: $b\approx 16{,}9$ см, $c\approx 24{,}9$ см, $\alpha=25°$. ◄

Задача 2. Решите треугольник по двум сторонам $a=14$ см, $b=8$ см и углу $\gamma=38°$ между ними.

Решение. По теореме косинусов $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

---

[1] В задачах этого пункта и упражнениях 4.1–4.9 приняты обозначения: a, b и c — длины сторон треугольника, α, β и γ — величины углов, противолежащих соответственно сторонам с длинами a, b и c.

Отсюда

$$c^2 = 196 + 64 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cos 38° \approx 260 - 224 \cdot 0{,}79 = 83{,}04;$$

$$c \approx 9{,}1 \text{ см}.$$

Далее имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos\alpha \approx \frac{8^2 + 9{,}1^2 - 14^2}{2 \cdot 8 \cdot 9{,}1} \approx -0{,}34,$$

Отсюда $\alpha \approx 110°$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получаем:

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma);\ \beta \approx 180° - 148° = 32°.$$

Ответ: $c \approx 9{,}1$ см, $\alpha \approx 110°$, $\beta \approx 32°$. ◀

Задача 3. Решите треугольник по трем сторонам $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

Решение. По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \ \cos\alpha = \frac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0{,}59.$$ Получаем: $\alpha \approx 54°$.

По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$. Отсюда

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a};\ \ \sin\beta \approx \frac{2 \sin 54°}{7} \approx \frac{2 \cdot 0{,}81}{7} \approx 0{,}23.$$

Поскольку b — длина наименьшей стороны данного треугольника, то угол β является острым. Тогда находим, что $\beta \approx 13°$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получаем:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 67° = 113°.$$

Ответ: $\alpha \approx 54°$, $\beta \approx 13°$, $\gamma \approx 113°$. ◀

Задача 4. Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из сторон:

1) $a = 17$ см, $b = 6$ см, $\alpha = 156°$;
2) $b = 7$ см, $c = 8$ см, $\beta = 65°$;
3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $\beta = 50°$.

Решение. 1) По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$.

Отсюда $\sin\beta = \dfrac{b \sin\alpha}{a}$; $\sin\beta = \dfrac{6 \sin 156°}{17} = \dfrac{6 \sin 24°}{17} \approx \dfrac{6 \cdot 0{,}41}{17} \approx 0{,}14.$

Поскольку угол α данного треугольника тупой, то угол β является острым. Тогда находим, что $\beta \approx 8°$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получаем:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 16°.$$

По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Отсюда $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $c \approx \dfrac{17\sin 16°}{\sin 156°} \approx \dfrac{17\cdot 0{,}28}{0{,}41} \approx 11{,}6$ (см).

Ответ: $\beta \approx 8°$, $\gamma \approx 16°$, $c \approx 11{,}6$ см.

2) По теореме синусов $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Отсюда $\sin\gamma = \dfrac{c\sin\beta}{b}$; $\sin\gamma = \dfrac{8\sin 65°}{7} \approx \dfrac{8\cdot 0{,}91}{7} = 1{,}04 > 1$, что невозможно.

Ответ: задача не имеет решения.

3) По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$. Отсюда

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b};\quad \sin\alpha = \frac{6\sin 50°}{5} \approx \frac{6\cdot 0{,}77}{5} \approx 0{,}92.$$

Возможны два случая: $\alpha \approx 67°$ или $\alpha \approx 180° - 67° = 113°$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \approx 67°$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получаем:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 117° = 63°.$$

По теореме синусов $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Отсюда $c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$; $c \approx \dfrac{5\sin 63°}{\sin 50°} \approx \dfrac{5\cdot 0{,}89}{0{,}77} \approx 5{,}8$ (см).

Рассмотрим случай, когда $\alpha \approx 113°$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получаем:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 163° = 17°.$$

Поскольку $c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, то $c \approx \dfrac{5\sin 17°}{\sin 50°} \approx \dfrac{5\cdot 0{,}29}{0{,}77} \approx 1{,}9$ (см).

Ответ: $\alpha \approx 67°$, $\gamma \approx 63°$, $c \approx 5{,}8$ см или $\alpha \approx 113°$, $\gamma \approx 17°$, $c \approx 1{,}9$ см. ◄

?

Что означает решить треугольник?

УПРАЖНЕНИЯ

4.1.° Решите треугольник по стороне и двум углам:
1) $a=10$ см, $\beta=20°$, $\gamma=85°$;
2) $b=16$ см, $\alpha=40°$, $\beta=110°$.

4.2.° Решите треугольник по стороне и двум углам:
1) $b=9$ см, $\alpha=35°$, $\gamma=70°$;
2) $c=14$ см, $\beta=132°$, $\gamma=24°$.

4.3.° Решите треугольник по двум сторонам и углу между ними:
1) $b=18$ см, $c=22$ см, $\alpha=76°$;
2) $a=20$ см, $b=15$ см, $\gamma=104°$.

4.4.° Решите треугольник по двум сторонам и углу между ними:
1) $a=8$ см, $c=6$ см, $\beta=15°$;
2) $b=7$ см, $c=5$ см, $\alpha=145°$.

4.5.° Решите треугольник по трем сторонам:
1) $a=4$ см, $b=5$ см, $c=7$ см;
2) $a=26$ см, $b=19$ см, $c=42$ см.

4.6.° Решите треугольник по трем сторонам:
1) $a=5$ см, $b=6$ см, $c=8$ см;
2) $a=21$ см, $b=17$ см, $c=32$ см.

4.7.° Решите треугольник, в котором:
1) $a=10$ см, $b=3$ см, $\beta=10°$, угол α острый;
2) $a=10$ см, $b=3$ см, $\beta=10°$, угол α тупой.

4.8.• Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из данных сторон:
1) $a=7$ см, $b=11$ см, $\beta=46°$;
2) $b=15$ см, $c=17$ см, $\beta=32°$;
3) $a=7$ см, $c=3$ см, $\gamma=27°$.

4.9.• Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из данных сторон:
1) $a=23$ см, $c=30$ см, $\gamma=102°$;
2) $a=18$ см, $b=25$ см, $\alpha=36°$.

4.10.• В треугольнике ABC известно, что $AB=BC=20$ см, $\angle A=70°$. Найдите: 1) сторону AC; 2) медиану CM; 3) биссектрису AD; 4) радиус описанной окружности треугольника ABC.

4.11.• Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 8 см, $\angle CAD=38°$, $\angle BAD=72°$. Найдите: 1) стороны трапеции; 2) радиус описанной окружности треугольника ABC.

4.12.•• Основания трапеции равны 12 см и 16 см, а боковые стороны — 7 см и 9 см. Найдите углы трапеции.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

4.13. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке M, а продолжение стороны CD за точку D — в точке K. Найдите отрезок DK, если $AM = 8$ см, а периметр параллелограмма равен 50 см.

4.14. Периметр одного из двух подобных треугольников на 18 см меньше периметра другого треугольника, а две соответственные стороны этих треугольников равны 5 см и 8 см. Найдите периметры данных треугольников.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

4.15. Точка M — середина стороны CD прямоугольника $ABCD$ (рис. 4.2), $AB = 6$ см, $AD = 5$ см. Чему равна площадь треугольника ACM?

4.16. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $\angle ADB = \alpha$. Докажите, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$.

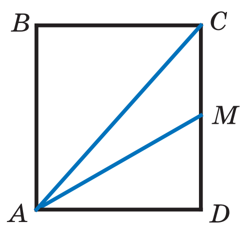


Рис. 4.2

ТРИГОНОМЕТРИЯ — НАУКА ОБ ИЗМЕРЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Вы знаете, что древние путешественники ориентировались по звездам и планетам. Они могли достаточно точно определить положение корабля в океане или каравана в пустыне по расположению светил на небосклоне. При этом одним из ориентиров служила высота, на которую поднималось над горизонтом то или иное небесное светило в данной местности в данный момент времени.

Понятно, что непосредственно измерить эту высоту невозможно. Поэтому ученые стали разрабатывать методы косвенных измерений. Здесь существенную роль играло решение треугольника, две вершины которого лежали на поверхности Земли, а третья являлась звездой (рис. 4.3) — знакомая вам задача 3.17.

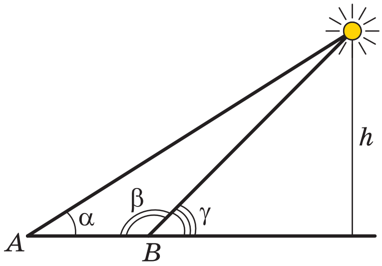


Рис. 4.3

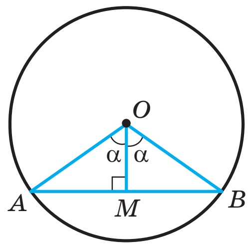


Рис. 4.4

Для решения подобных задач древним астрономам необходимо было научиться находить взаимосвязи между элементами треугольника. Так возникла **тригонометрия** — наука, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника. Термин «тригонометрия» (от греческих слов «тригонон» — треугольник и «метрео» — измерять) означает «измерение треугольников».

На рисунке 4.4 изображен центральный угол AOB, равный 2α. Из прямоугольного треугольника OMB имеем: $MB = OB \sin \alpha$. Следовательно, если в единичной окружности измерить половины длин хорд, на которые опираются центральные углы с величинами $2°$, $4°$, $6°$, ..., $180°$, то тем самым мы можем вычислить значения синусов углов $1°$, $2°$, $3°$, ..., $90°$ соответственно.

Измеряя длины полухорд, древнегреческий астроном Гиппарх (II в. до н. э.) составил первые тригонометрические таблицы.

Понятия синуса и косинуса появляются в тригонометрических трактатах индийских ученых в IV–V вв. н. э. В X в. арабские ученые оперировали понятием тангенса, которое возникло из потребностей гномоники — учения о солнечных часах (рис. 4.5).

Рис. 4.5

В Европе первой работой, в которой тригонометрия рассматривалась как отдельная наука, был трактат «Пять книг о треугольниках всех видов», впервые напечатанный в 1533 г. Его автором

Леонард Эйлер
(1707–1783)

Выдающийся математик, физик, механик и астроном, автор более 860 научных работ. Член Петербургской, Берлинской, Парижской академий наук, Лондонского королевского общества, многих других академий и научных обществ. Имя Эйлера встречается почти во всех областях математики: теоремы Эйлера, тождества Эйлера, углы, функции, интегралы, формулы, уравнения, подстановки и т. д.

был немецкий ученый Региомонтан (1436–1476). Этот же ученый открыл и теорему тангенсов:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},\qquad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}},\qquad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

где a, b и c — длины сторон треугольника, α, β и γ — величины углов треугольника, противолежащих соответственно сторонам с длинами a, b и c.

Современный вид тригонометрия приобрела в работах великого математика Леонарда Эйлера.

5. Формулы для нахождения площади треугольника

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что площадь S треугольника со сторонами a, b и c и высотами h_a, h_b и h_c можно вычислить по формулам

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c.$$

Теперь у нас появилась возможность получить еще несколько формул для нахождения площади треугольника.

Теорема 5.1. ***Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними.***

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, площадь которого равна S, такой, что $BC=a$, $AC=b$ и $\angle C=\gamma$. Докажем, что

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma}$$

Возможны три случая:
1) угол γ острый (рис. 5.1);
2) угол γ тупой (рис. 5.2);
3) угол γ прямой.

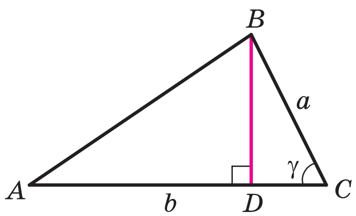


Рис. 5.1

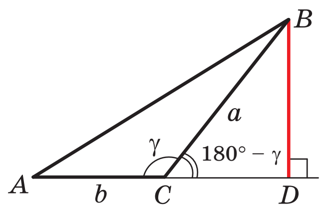


Рис. 5.2

На рисунках 5.1 и 5.2 проведем высоту BD треугольника ABC. Тогда $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} BD \cdot b$.

Из прямоугольного треугольника BDC в первом случае (см. рис. 5.1) получаем: $BD = a \sin \gamma$, а во втором (см. рис. 5.2): $BD = a \sin (180° - \gamma) = a \sin \gamma$. Отсюда для двух первых случаев имеем: $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Если угол C прямой, то $\sin \gamma = 1$. Для прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b имеем:

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \sin 90° = \frac{1}{2} ab \sin \gamma. \blacktriangleleft$$

Теорема 5.2 (формула Герона[1]). ***Площадь S треугольника со сторонами a, b и c можно вычислить по формуле***

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

где p — его полупериметр.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, площадь которого равна S, такой, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажем, что

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

[1] Герон Александрийский — древнегреческий ученый, живший в I в. н. э. Его математические труды — энциклопедия прикладной математики.

Пусть $\angle C = \gamma$. Запишем формулу площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Отсюда $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma$.

По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Тогда $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Поскольку $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)$, то:

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{16}(c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2) =$$

$$= \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2b}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{2p-2a}{2} \cdot \frac{2p-2b}{2} \cdot \frac{2p-2c}{2} \cdot \frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Отсюда $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ◄

Теорема 5.3. ***Площадь S треугольника со сторонами a, b и c можно вычислить по формуле***

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

Доказательство. ⊙ Рассмотрим треугольник ABC, площадь которого равна S, такой, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажем, что $S = \frac{abc}{4R}$, где R — радиус описанной окружности треугольника.

Пусть $\angle A = \alpha$. Запишем формулу площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Из леммы п. 3 следует, что $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

Тогда $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$. ◄

Заметим, что доказанная теорема позволяет находить радиус описанной окружности треугольника по формуле

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Теорема 5.4. ***Площадь треугольника равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.***

Доказательство. На рисунке 5.3 изображен треугольник ABC, в который вписана окружность радиуса r. Докажем, что

$$\boxed{S = pr,}$$

где S — площадь данного треугольника, p — его полупериметр.

Пусть точка O — центр вписанной окружности, которая касается сторон треугольника ABC в точках M, N и P. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOB, BOC и COA:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

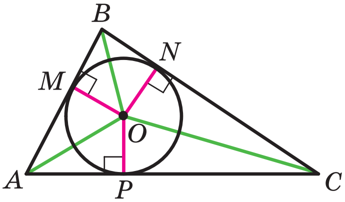


Рис. 5.3

Проведем радиусы в точки касания. Получаем: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Отсюда:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OM \cdot AB = \frac{1}{2}r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}ON \cdot BC = \frac{1}{2}r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}OP \cdot AC = \frac{1}{2}r \cdot AC.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr. \blacktriangleleft$$

Теорему 5.4 обобщает следующая теорема.

Теорема 5.5. ***Площадь описанного многоугольника равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.***

Докажите эту теорему самостоятельно (рис. 5.4).

Заметим, что теорема 5.5 позволяет находить радиус вписанной окружности многоугольника по формуле

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

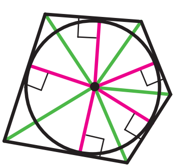


Рис. 5.4

Задача 1. Докажите, что площадь S параллелограмма можно вычислить по формуле

$$\boxed{S = ab\sin\alpha,}$$

где a и b — длины соседних сторон параллелограмма, α — угол между ними.

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $AB=a$, $AD=b$, $\angle BAD=\alpha$ (рис. 5.5). Проведем диагональ BD. Поскольку $\Delta ABD=\Delta CBD$, то запишем:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\cdot\frac{1}{2}ab\sin\alpha = ab\sin\alpha.$$

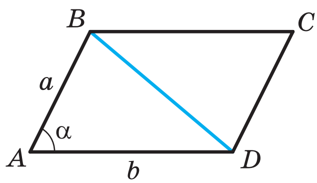


Рис. 5.5

Задача 2. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними.

Решение. Пусть угол между диагоналями AC и BD четырехугольника $ABCD$ равен φ. На рисунке 5.6 $\angle AOB=\varphi$. Тогда $\angle BOC=\angle AOD=180°-\varphi$ и $\angle COD=\varphi$. Имеем:

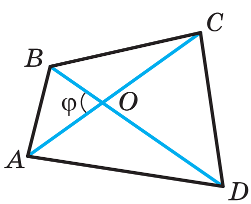


Рис. 5.6

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA} =$$

$$=\frac{1}{2}OB\cdot OA\cdot\sin\varphi+\frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin(180°-\varphi)+$$

$$+\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\varphi+\frac{1}{2}OD\cdot OA\cdot\sin(180°-\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2}OB(OA+OC)\cdot\sin\varphi+\frac{1}{2}OD(OC+OA)\cdot\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}OB\cdot AC\cdot\sin\varphi+\frac{1}{2}OD\cdot AC\cdot\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}AC(OB+OD)\cdot\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi.$$

Задача 3. Стороны треугольника равны 17 см, 65 см и 80 см. Найдите наименьшую высоту треугольника, радиусы его вписанной и описанной окружностей.

Решение. Пусть $a=17$ см, $b=65$ см, $c=80$ см.

Найдем полупериметр треугольника:

$$p=\frac{17+65+80}{2}=81\ (\text{см}).$$

Площадь треугольника вычислим по формуле Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)}=$$
$$=\sqrt{81\cdot64\cdot16}=9\cdot8\cdot4=288\ (\text{см}^2).$$

Наименьшей высотой треугольника является высота, проведенная к его наибольшей стороне, длина которой равна c.

Поскольку $S=\frac{1}{2}ch_c$, то $h_c=\frac{2S}{c}=\frac{2\cdot288}{80}=7{,}2$ (см).

Радиус вписанной окружности

$$r=\frac{S}{p}=\frac{288}{81}=\frac{32}{9}\ (\text{см}).$$

Радиус описанной окружности

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{17\cdot65\cdot80}{4\cdot288}=\frac{17\cdot65\cdot5}{4\cdot18}=\frac{5525}{72}\ (\text{см}).$$

Ответ: 7,2 см, $\frac{32}{9}$ см, $\frac{5525}{72}$ см. ◀

?

1. Как можно найти площадь треугольника, если известны две его стороны и угол между ними?
2. Запишите формулу Герона для вычисления площади треугольника.
3. Как можно вычислить площадь треугольника со сторонами a, b и c и радиусом R описанной окружности?
4. Как можно найти радиус описанной окружности треугольника, если известны площадь треугольника и его стороны?
5. Как можно найти площадь треугольника, если известны его полупериметр и радиус вписанной окружности?
6. Как можно найти радиус вписанной окружности треугольника, если известны площадь треугольника и его стороны?
7. Чему равна площадь описанного многоугольника?

УПРАЖНЕНИЯ

5.1.° Найдите площадь треугольника ABC, если:
1) $AB = 12$ см, $AC = 9$ см, $\angle A = 30°$;
2) $AC = 3$ см, $BC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$.

5.2.° Найдите площадь треугольника DEF, если:
1) $DE = 7$ см, $DF = 8$ см, $\angle D = 60°$;
2) $DE = 10$ см, $EF = 6$ см, $\angle E = 150°$.

5.3.° Площадь треугольника MKN равна 75 см^2. Найдите сторону MK, если $KN = 15$ см, $\angle K = 30°$.

5.4.° Найдите угол между данными сторонами треугольника ABC, если:
1) $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, площадь треугольника равна $30\sqrt{3}$ см^2;
2) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см, площадь треугольника равна 56 см^2.

5.5.° Площадь треугольника ABC равна 18 см^2. Известно, что $AC = 8$ см, $BC = 9$ см. Найдите угол C.

5.6.° Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной 16 см и углом 15° при основании.

5.7.° Найдите площадь треугольника со сторонами:
1) 13 см, 14 см, 15 см; 2) 2 см, 3 см, 4 см.

5.8.° Найдите площадь треугольника со сторонами:
1) 9 см, 10 см, 17 см; 2) 4 см, 5 см, 7 см.

5.9.° Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 13 см, 20 см и 21 см.

5.10.° Найдите наибольшую высоту треугольника со сторонами 11 см, 25 см и 30 см.

5.11.° Периметр треугольника равен 32 см, а радиус вписанной окружности — 1,5 см. Найдите площадь треугольника.

5.12.° Площадь треугольника равна 84 см^2, а его периметр — 72 см. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.

5.13.° Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами:
1) 5 см, 5 см и 6 см;
2) 25 см, 29 см и 36 см.

5.14.° Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 6 см, 25 см и 29 см.

5.15.° Найдите площадь параллелограмма по его сторонам a и b и углу α между ними, если:

1) $a = 5\sqrt{2}$ см, $b = 9$ см, $\alpha = 45°$; 2) $a = 10$ см, $b = 18$ см, $\alpha = 150°$.

5.16.° Чему равна площадь параллелограмма, стороны которого равны 7 см и 12 см, а один из углов — 120°?

5.17.° Найдите площадь ромба со стороной $9\sqrt{3}$ см и углом 60°.

5.18.° Диагонали выпуклого четырехугольника равны 8 см и 12 см, а угол между ними — 30°. Найдите площадь четырехугольника.

5.19.° Найдите площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого равны $3\sqrt{3}$ см и 4 см, а угол между ними — 60°.

5.20.° Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, площадь которого равна 36 см², а угол при вершине — 30°.

5.21.• Какой треугольник с двумя данными сторонами имеет наибольшую площадь?

5.22.• Может ли площадь треугольника со сторонами 4 см и 6 см быть равной:

1) 6 см²; 2) 14 см²; 3) 12 см²?

5.23.• Две соседние стороны параллелограмма соответственно равны двум соседним сторонам прямоугольника. Чему равен острый угол параллелограмма, если его площадь в два раза меньше площади прямоугольника?

5.24.• Найдите отношение площадей S_1 и S_2 треугольников, изображенных на рисунке 5.7 (длины отрезков даны в сантиметрах).

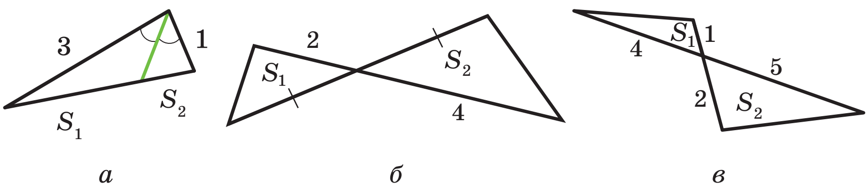


Рис. 5.7

5.25.• Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Площадь треугольника ABD равна 12 см², а треугольника ACD — 20 см². Найдите отношение стороны AB к стороне AC.

5.26.• Найдите площадь треугольника, сторона которого равна a, а прилежащие к ней углы равны β и γ.

5.27.• Радиус окружности, описанной около треугольника, равен R, а два угла треугольника равны α и β. Найдите площадь треугольника.

5.28.$^{\bullet}$ В треугольнике ABC известно, что $AC=b$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$. Найдите площадь треугольника.

5.29.$^{\bullet}$ В треугольнике ABC угол A равен α, а высоты BD и CE равны соответственно h_1 и h_2. Найдите площадь треугольника ABC.

5.30.$^{\bullet}$ Отрезок BM — высота треугольника ABC, $BM=h$, $\angle A=\alpha$, $\angle ABC=\beta$. Найдите площадь треугольника ABC.

5.31.$^{\bullet}$ В треугольник со сторонами 17 см, 25 см и 28 см вписана окружность, центр которой соединен с вершинами треугольника. Найдите площади образовавшихся треугольников.

5.32.$^{\bullet\bullet}$ Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, $AB=6$ см, $AC=8$ см, $\angle BAC=120°$. Найдите биссектрису AD.

5.33.$^{\bullet\bullet}$ Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 см и 50 см, а боковые стороны — 13 см и 37 см.

5.34.$^{\bullet\bullet}$ Основания трапеции равны 4 см и 5 см, а диагонали — 7 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

5.35.$^{\bullet\bullet}$ Отрезки BM и CK — высоты остроугольного треугольника ABC, $\angle A=45°$. Найдите отношение площадей треугольников AMK и ABC.

5.36.$^{\bullet\bullet}$ Стороны треугольника равны 39 см, 41 см и 50 см. Найдите радиус окружности, центр которой принадлежит большей стороне треугольника и которая касается двух других сторон.

5.37.$^{\bullet\bullet}$ Вершины треугольника соединены с центром вписанной в него окружности. Проведенные отрезки разбивают данный треугольник на треугольники, площади которых равны 26 см², 28 см² и 30 см². Найдите стороны данного треугольника.

5.38.$^{\bullet\bullet}$ Докажите, что $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$, где h_1, h_2 и h_3 — длины высот треугольника, r — радиус вписанной окружности.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

5.39. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит его угол в отношении 4 : 5. Определите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.

5.40. Средняя линия MK трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 56 см. Через середину M стороны AB проведена прямая, которая параллельна стороне CD и пересекает основание AD в точке E так, что $AE : ED=5 : 8$. Найдите основания трапеции.

5.41. Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, которая параллельна прямой AC и пересекает сторону BC в точке E. Найдите отрезок DE, если $AC = 16$ см, $BC = 24$ см.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

5.42. Найдите сумму углов выпуклого семиугольника.

5.43. Существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна:

1) $1080°$; 2) $1200°$?

5.44. Существует ли многоугольник, каждый угол которого равен:

1) $72°$; 2) $171°$?

5.45. Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):

1) если все стороны многоугольника, вписанного в окружность, равны, то и все его углы также равны;
2) если все углы многоугольника, вписанного в окружность, равны, то и все его стороны также равны;
3) если все стороны многоугольника, описанного около окружности, равны, то и все его углы также равны;
4) если все углы многоугольника, описанного около окружности, равны, то и все его стороны также равны?

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

5.46. Дан квадрат размером 99×99 клеток. Каждая клетка квадрата окрашена в черный или в белый цвет. Разрешается одновременно перекрасить все клетки некоторого столбца или некоторой строки в тот цвет, клеток которого в этом столбце или в этой строке до перекрашивания было больше. Всегда ли можно добиться того, чтобы все клетки квадрата стали одного цвета?

ВНЕВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Проведем биссектрисы двух внешних углов с вершинами A и C треугольника ABC (рис. 5.8). Пусть O — точка пересечения этих биссектрис. Тогда точка O равноудалена от прямых AB, BC и AC.

Проведем три перпендикуляра: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Очевидно, что $OM = OK = ON$. Следовательно, существует окружность с центром в точке O, которая касается стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Такую окружность называют **вневписанной** окружностью треугольника ABC (рис. 5.8).

Поскольку $OM = ON$, то точка O принадлежит биссектрисе угла ABC.

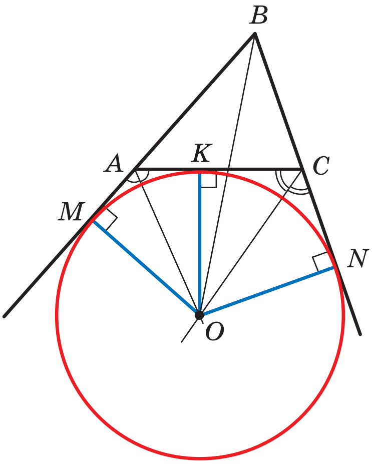


Рис. 5.8

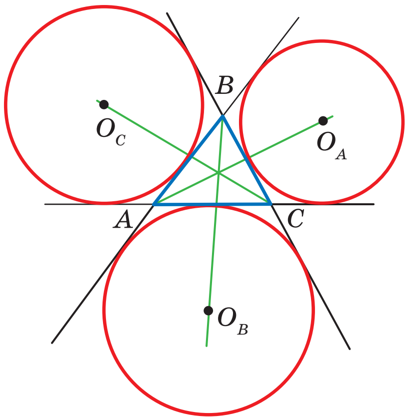


Рис. 5.9

Любой треугольник имеет три вневписанные окружности. На рисунке 5.9 их центры обозначены O_A, O_B и O_C. Радиусы этих окружностей обозначим соответственно r_a, r_b и r_c.

По свойству касательных, проведенных к окружности через одну точку, имеем: $CK = CN$, $AK = AM$ (рис. 5.8). Тогда $AC = CN + AM$. Следовательно, периметр треугольника ABC равен сумме $BM + BN$. Однако $BM = BN$. Тогда $BM = BN = p$, где p — полупериметр треугольника ABC.

Имеем:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} = \frac{1}{2}OM \cdot AB + \frac{1}{2}ON \cdot BC - \frac{1}{2}OK \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2}r_b\,(c + a - b) = r_b \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} = r_b \cdot \frac{2p - 2b}{2} = r_b\,(p - b).$$

Отсюда $r_b = \dfrac{S}{p - b}$, где S — площадь треугольника ABC.

Аналогично можно показать, что $r_a = \dfrac{S}{p - a}$, $r_c = \dfrac{S}{p - c}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.
2. Докажите, что площадь S прямоугольного треугольника можно вычислить по формуле $S=r_c\cdot r$, где r_c — радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы треугольника, r — радиус вписанной окружности данного треугольника.
3. В равносторонний треугольник со стороной a вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что отрезок касательной, принадлежащий треугольнику, равен b. Найдите площадь треугольника, который эта касательная отсекает от равностороннего треугольника.
4. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне AD, $\angle ADC=135°$, $\angle BAD=\angle BCD=60°$. Докажите, что диагональ AC является биссектрисой угла BAD.
   Указание. Докажите, что точка C — центр вневписанной окружности треугольника ABD.
5. В треугольнике ABC угол B равен $120°$. Отрезки AN, CF и BK — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что угол NKF равен $90°$.
   Указание. На продолжении стороны AB за точку B отметим точку M. Тогда $\angle MBC=\angle KBC=60°$, то есть луч BC — биссектриса внешнего угла MBK треугольника ABK. Отсюда следует, что точка N — центр вневписанной окружности треугольника ABK. Аналогично можно доказать, что точка F — центр вневписанной окружности треугольника BCK.
6. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1 см. На сторонах AB и BC отметили точки M и N соответственно так, что периметр треугольника MBN равен 2 см. Найдите угол MDN.
   Указание. Докажите, что точка D — центр вневписанной окружности треугольника MBN.

ЗАДАНИЕ № 1 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Какое из равенств верно?
А) $\cos(180° - \alpha) = \sin\alpha$;
Б) $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$;
В) $\sin(180° - \alpha) = \cos\alpha$;
Г) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

2. Какое из неравенств верно?
А) $\sin 100° \cos 110° > 0$;
Б) $\sin 100° \cos 10° < 0$;
В) $\sin 100° \cos 110° < 0$;
Г) $\sin 100° \cos 90° > 0$.

3. Найдите третью сторону треугольника, если две его стороны равны 3 см и 8 см, а угол между ними равен 120°.
А) $\sqrt{97}$ см; Б) 7 см; В) 9 см; Г) $\sqrt{32}$ см.

4. Каким является угол, лежащий против большей стороны треугольника со сторонами 4 см, 7 см и 9 см?
А) Острым;
Б) тупым;
В) прямым;
Г) установить невозможно.

5. Угол между двумя сторонами треугольника, одна из которых на 10 см больше другой, равен 60°, а третья сторона равна 14 см. Какова длина наибольшей стороны треугольника?
А) 16 см; Б) 14 см; В) 18 см; Г) 15 см.

6. Диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см, а его стороны относятся как 2 : 3. Чему равен периметр параллелограмма?
А) 25 см; Б) 30 см; В) 40 см; Г) 50 см.

7. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$ см, $\angle C = 30°$, $\angle A = 45°$. Найдите сторону BC.
А) $8\sqrt{2}$ см; Б) $4\sqrt{2}$ см; В) $16\sqrt{2}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см.

8. Чему равно отношение $AC : BC$ сторон треугольника ABC, если $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$?
А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Б) $\sqrt{3}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

9. В треугольнике ABC известно, что $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника.
А) 4 см; Б) 8 см; В) 16 см; Г) 2 см.

10. Какое наибольшее значение может принимать площадь треугольника со сторонами 8 см и 12 см?

А) 96 см^2; В) 24 см^2;
Б) 48 см^2; Г) установить невозможно.

11. Найдите сумму радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 25 см, 33 см и 52 см.

А) 36 см; Б) 30 см; В) 32,5 см; Г) 38,5 см.

12. Две стороны треугольника равны 11 см и 23 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 10 см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

А) 15 см; Б) 30 см; В) 25 см; Г) 20 см.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 1

Косинус и синус

Косинусом и синусом угла α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$, которому соответствует точка M единичной полуокружности, называют соответственно абсциссу и ординату точки M.

Тангенс

Тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$, называют отношение $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Следствие из теоремы косинусов

Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, причем a — длина его наибольшей стороны. Если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник является остроугольным. Если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник является тупоугольным. Если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник является прямоугольным.

Лемма о хорде окружности

Хорда окружности равна произведению диаметра и синуса любого вписанного угла, опирающегося на эту хорду.

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Формулы для нахождения площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$S = pr$

Формула для нахождения радиуса окружности, вписанной в треугольник

$$r = \frac{S}{p}$$

Формулы для нахождения радиуса окружности, описанной около треугольника

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Площадь многоугольника, описанного около окружности

Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ §2

В этом параграфе вы узнаете, какие многоугольники называют правильными. Изучите свойства правильных многоугольников. Узнаете, как с помощью циркуля и линейки строить некоторые из них.

Научитесь находить радиусы вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника, длину дуги окружности, площади сектора и сегмента круга.

6. Правильные многоугольники и их свойства

Определение. Многоугольник называют правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

С некоторыми правильными многоугольниками вы уже знакомы: равносторонний треугольник — это правильный треугольник, квадрат — это правильный четырехугольник. На рисунке 6.1 изображены правильные пятиугольник и восьмиугольник.

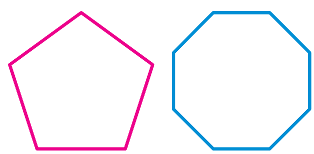


Рис. 6.1

Ознакомимся с некоторыми свойствами, которыми обладают все правильные n-угольники.

Теорема 6.1. ***Правильный многоугольник является выпуклым многоугольником.***

С доказательством этой теоремы вы можете ознакомиться на с. 61–62.

Каждый угол правильного n-угольника равен $\frac{180°(n-2)}{n}$. Действительно, поскольку сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$ и все углы равны, то каждый из них равен $\frac{180°(n-2)}{n}$.

В правильном треугольнике существует точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон. Это точка пересечения биссектрис правильного треугольника. Точка пересечения диагоналей квадрата также обладает аналогичным свойством. То, что в любом правильном многоугольнике существует точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон, подтверждает следующая теорема.

Теорема 6.2. ***Любой правильный многоугольник является как вписанным в окружность, так и описанным около окружности, причем центры описанной и вписанной окружностей совпадают.***

Доказательство. На рисунке 6.2 изображен правильный n-угольник $A_1A_2A_3...A_n$. Докажем, что в него можно вписать и около него можно описать окружности.

Проведем биссектрисы углов A_1 и A_2. Пусть O — точка их пересечения. Соединим точки O и A_3. Поскольку в треугольниках OA_1A_2 и OA_2A_3 углы 2 и 3 равны, $A_1A_2=A_2A_3$ и OA_2 — общая сторона, то эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Кроме того, углы 1 и 2 равны как половины равных углов. Отсюда треугольник OA_1A_2 — равнобедренный, следовательно, равнобедренным является треугольник OA_2A_3. Поэтому $OA_1=OA_2=OA_3$.

Соединяя точку O с вершинами A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n, аналогично можно показать, что $OA_3=OA_4=...=OA_{n-1}=OA_n$.

Таким образом, для многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ существует точка, равноудаленная от всех его вершин. Это точка O — центр описанной окружности.

Поскольку равнобедренные треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 равны, то равны и их высоты, проведенные из вершины O. Отсюда делаем вывод: точка O равноудалена от всех сторон многоугольника. Следовательно, точка O — центр вписанной окружности. ◀

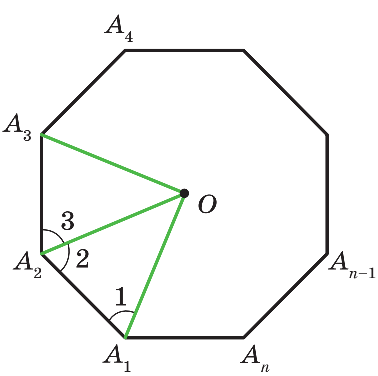


Рис. 6.2

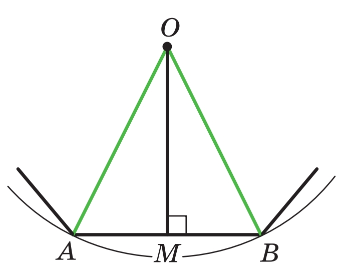


Рис. 6.3

Точку, которая является центром описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника, называют **центром правильного многоугольника**.

На рисунке 6.3 изображен фрагмент правильного n-угольника с центром O и стороной AB, длину которой обозначим a_n. Угол AOB называют **центральным углом правильного многоугольника**. Понятно, что $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$.

В равнобедренном треугольнике AOB проведем высоту OM. Тогда $\angle AOM = \angle BOM = \frac{180^\circ}{n}$, $AM = MB = \frac{a_n}{2}$. Из треугольника OMB получаем, что

$$OB = \frac{MB}{\sin \angle BOM} = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \text{ и } OM = \frac{MB}{\operatorname{tg} \angle BOM} = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

Отрезки OB и OM — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей правильного n-угольника. Если длины этих радиусов обозначить R_n и r_n соответственно, то полученные результаты можно записать в виде формул:

$$\boxed{R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}} \qquad \boxed{r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}}$$

Подставив в эти формулы вместо n числа 3, 4, 6, получим формулы для нахождения радиусов описанной и вписанной окружностей для правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника со стороной a:

Количество сторон правильного n-угольника	$n=3$	$n=4$	$n=6$
Радиус описанной окружности	$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радиус вписанной окружности	$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Из полученных результатов следует, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу его описанной окружности. Отсюда получаем алгоритм построения правильного шестиугольника: от произвольной точки M окружности надо последовательно откладывать хорды, равные радиусу (рис. 6.4). Таким образом получаем вершины правильного шестиугольника.

Соединив через одну вершины правильного шестиугольника, получим правильный треугольник (рис. 6.5).

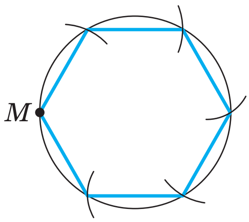


Рис. 6.4

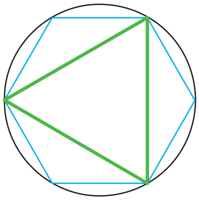


Рис. 6.5

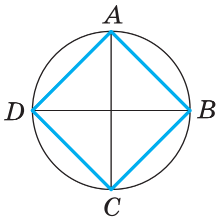


Рис. 6.6

Для построения правильного четырехугольника достаточно в окружности провести два перпендикулярных диаметра AC и BD (рис. 6.6). Тогда четырехугольник $ABCD$ — квадрат (докажите это самостоятельно).

Если уже построен правильный n-угольник, то легко построить правильный $2n$-угольник. Для этого надо найти середины всех сторон n-угольника и провести радиусы описанной окружности через полученные точки. Тогда концы радиусов и вершины данного n-угольника будут вершинами правильного $2n$-угольника. На рисунках 6.7 и 6.8 показано построение правильных 8-угольника и 12-угольника.

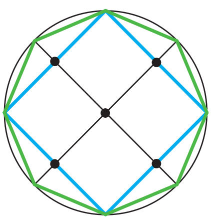


Рис. 6.7

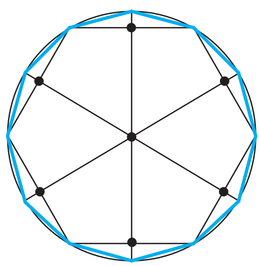


Рис. 6.8

Задача 1. Существует ли правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 155°; 2) 177°? В случае утвердительного ответа укажите вид многоугольника.

1) Пусть n — количество сторон искомого правильного многоугольника. С одной стороны, сумма его углов равна $180°\,(n-2)$.

С другой стороны, эта сумма равна $155°n$. Следовательно, $180°(n-2)=$ $=155°n$; $25°n=360°$; $n=14{,}4$. Поскольку n должно быть натуральным числом, то такого правильного многоугольника не существует.

2) Имеем: $180°(n-2)=177°n$; $180°n-360°=177°n$; $n=120$.

Ответ: 1) не существует; 2) существует, это — стодвадцатиугольник. ◀

Задача 2. В окружность вписан правильный треугольник со стороной 18 см. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

Решение. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, вычисляют по формуле $R_3=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, где a — длина стороны треугольника (рис. 6.9). Следовательно,

$$R_3=\frac{18\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}\ (\text{см}).$$

По условию радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен радиусу окружности, описанной около правильного треугольника, то есть $r_6=R_3=6\sqrt{3}$ см. Поскольку $r_6=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, где b — длина стороны правильного шестиугольника, то

$$b=\frac{2r_6}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=12\ (\text{см}).$$

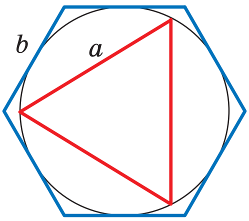


Рис. 6.9

Ответ: 12 см. ◀

?

1. Какой многоугольник называют правильным?
2. Какое другое название имеет правильный треугольник?
3. Какое другое название имеет правильный четырехугольник?
4. Около какого правильного многоугольника можно описать окружность?
5. В какой правильный многоугольник можно вписать окружность?
6. Как расположены относительно друг друга центры вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника?
7. Что называют центром правильного многоугольника?
8. Запишите формулы радиусов вписанной и описанной окружностей правильного n-угольника, треугольника, четырехугольника, шестиугольника.

9. Опишите построение правильного шестиугольника.
10. Опишите построение правильного четырехугольника.
11. Как, имея построенный правильный n-угольник, можно построить правильный $2n$-угольник?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

6.1.° Начертите окружность, радиус которой равен 3 см. Постройте вписанный в эту окружность:
1) правильный шестиугольник;
2) правильный треугольник;
3) правильный двенадцатиугольник.

6.2.° Начертите окружность, радиус которой равен 2,5 см. Постройте вписанный в эту окружность: 1) правильный четырехугольник; 2) правильный восьмиугольник.

УПРАЖНЕНИЯ

6.3.° Найдите углы правильного n-угольника, если:
1) $n=6$; 2) $n=9$; 3) $n=15$.

6.4.° Найдите углы правильного:
1) восьмиугольника; 2) десятиугольника.

6.5.° Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен:
1) 160°; 2) 171°?

6.6.° Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен:
1) 108°; 2) 175°?

6.7.° Существует ли правильный многоугольник, угол которого равен:
1) 140°; 2) 130°?

6.8.° Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если угол, смежный с углом многоугольника, составляет $\frac{1}{9}$ угла многоугольника?

6.9.° Определите количество сторон правильного многоугольника, если его угол на 168° больше смежного с ним угла.

6.10.° Сколько сторон имеет правильный многоугольник, вписанный в окружность, если градусная мера дуги описанной окружности, которую стягивает сторона многоугольника, равна:
1) 90°; 2) 24°?

6.11.° Найдите количество сторон правильного многоугольника, центральный угол которого равен:
1) 120°; 2) 72°.

6.12.° Пусть a — длина стороны правильного треугольника, R и r — соответственно радиусы его описанной и вписанной окружностей. Заполните таблицу (длины даны в сантиметрах):

a	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

6.13.° Пусть a — длина стороны квадрата, R и r — соответственно радиусы его описанной и вписанной окружностей. Заполните таблицу (длины даны в сантиметрах):

a	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

6.14.° Высота правильного треугольника равна 15 см. Чему равен радиус:
1) описанной окружности; 2) вписанной окружности?

6.15.° Диагональ квадрата равна $6\sqrt{2}$ см. Чему равен радиус:
1) описанной окружности; 2) вписанной окружности?

6.16.° Радиус окружности равен 12 см. Найдите сторону вписанного в эту окружность правильного:
1) шестиугольника; 2) двенадцатиугольника.

6.17.° Радиус окружности равен $8\sqrt{3}$ см. Найдите сторону описанного около этой окружности правильного шестиугольника.

6.18.° Докажите, что радиус окружности, описанной около правильного треугольника, в два раза больше радиуса окружности, вписанной в этот треугольник.

6.19.° Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, на 4 см больше радиуса вписанной окружности. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей и сторону треугольника.

6.20.° Сторона правильного многоугольника равна a, радиус описанной окружности равен R. Найдите радиус вписанной окружности.

6.21.° Радиусы вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника равны соответственно r и R. Найдите сторону многоугольника.

6.22.° Сторона правильного многоугольника равна a, радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус описанной окружности.

6.23.° Около окружности описан правильный шестиугольник со стороной $4\sqrt{3}$ см. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

6.24.° В окружность вписан квадрат со стороной $6\sqrt{2}$ см. Найдите сторону правильного треугольника, описанного около этой окружности.

6.25.° Диаметр круга равен 16 см. Можно ли из него вырезать квадрат со стороной 12 см?

6.26.° Каким должен быть наименьший диаметр круглого бревна, чтобы из него можно было изготовить брус, поперечным сечением которого является правильный треугольник со стороной 15 см?

6.27.° Каким должен быть наименьший диаметр круглого бревна, чтобы из него можно было изготовить брус, поперечным сечением которого является квадрат со стороной 14 см?

6.28.• Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого на 36° больше его центрального угла?

6.29.• Угол между радиусами вписанной окружности правильного многоугольника, проведенными в точки касания этой окружности с соседними сторонами многоугольника, равен 20°. Найдите количество сторон многоугольника.

6.30.• Докажите, что все диагонали правильного пятиугольника равны.

6.31.• Докажите, что каждая диагональ правильного пятиугольника параллельна одной из его сторон.

6.32.$^{\bullet}$ Общая хорда двух пересекающихся окружностей является стороной правильного треугольника, вписанного в одну окружность, и стороной квадрата, вписанного в другую окружность. Длина этой хорды равна a. Найдите расстояние между центрами окружностей, если они лежат:

1) по разные стороны от хорды; 2) по одну сторону от хорды.

6.33.$^{\bullet}$ Общая хорда двух пересекающихся окружностей является стороной правильного треугольника, вписанного в одну окружность, и стороной правильного шестиугольника, вписанного в другую окружность. Длина этой хорды равна a. Найдите расстояние между центрами окружностей, если они лежат:

1) по разные стороны от хорды; 2) по одну сторону от хорды.

6.34.$^{\bullet}$ В окружность вписан правильный треугольник и около нее описан правильный треугольник. Найдите отношение сторон этих треугольников.

6.35.$^{\bullet}$ В окружность вписан правильный шестиугольник и около нее описан правильный шестиугольник. Найдите отношение сторон этих шестиугольников.

6.36.$^{\bullet}$ Докажите, что сторона правильного восьмиугольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где R — радиус его описанной окружности.

6.37.$^{\bullet}$ Докажите, что сторона правильного двенадцатиугольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, где R — радиус его описанной окружности.

6.38.$^{\bullet}$ Какая ширина проема должна быть у ключа для шестигранной гайки, основания которой имеют форму правильного шестиугольника (рис. 6.10), если ширина грани гайки равна 25 мм, а зазор между гранями гайки и ключа — 0,5 мм?

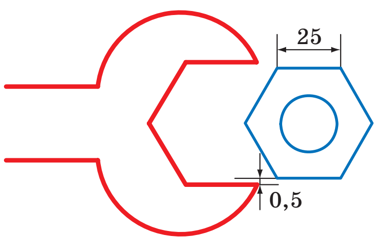


Рис. 6.10

6.39.$^{\bullet}$ Найдите площадь правильного восьмиугольника, если радиус описанной около него окружности равен R.

6.40.$^{\bullet}$ Найдите диагонали и площадь правильного шестиугольника, сторона которого равна a.

6.41.•• Углы квадрата со стороной 6 см срезали так, что получили правильный восьмиугольник. Найдите сторону полученного восьмиугольника.

6.42.•• Углы правильного треугольника со стороной 24 см срезали так, что получили правильный шестиугольник. Найдите сторону полученного шестиугольника.

6.43.•• Найдите диагонали правильного восьмиугольника, сторона которого равна a.

6.44.•• В правильном двенадцатиугольнике, сторона которого равна a, последовательно соединили середины шести сторон, взятых через одну. Найдите сторону образовавшегося правильного шестиугольника.

6.45.•• В правильном восьмиугольнике, сторона которого равна a, последовательно соединили середины четырех сторон, взятых через одну. Найдите сторону образовавшегося квадрата.

6.46.* Форму каких равных правильных многоугольников могут иметь дощечки паркета, чтобы ими можно было выстлать пол?

6.47.* Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна 1 см. Пользуясь только линейкой, постройте отрезок длиной $\sqrt{7}$ см.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

6.48. Окружность разделена на 5 равных дуг: $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup AE$. Найдите:

1) $\angle BAC$; 2) $\angle BAD$; 3) $\angle BAE$; 4) $\angle CAD$; 5) $\angle DAE$.

6.49. На одной стороне угла с вершиной в точке A отметили точки B и C (точка B лежит между точками A и C), а на другой — точки D и E (точка D лежит между точками A и E), причем $AB = 28$ см, $BC = 8$ см, $AD = 24$ см, $AE = 42$ см, $BE = 21$ см. Найдите отрезок CD.

6.50. Основание равнобедренного тупоугольного треугольника равно 24 см, а радиус окружности, описанной около него, — 13 см. Найдите площадь треугольника.

6.51. Через точку A к окружности проведены две касательные. Расстояние от точки A до точки касания равно 12 см, а расстояние между точками касания — 14,4 см. Найдите радиус окружности.

О ПОСТРОЕНИИ ПРАВИЛЬНЫХ n-УГОЛЬНИКОВ

Докажем, что любой правильный n-угольник является выпуклым многоугольником. Для этого достаточно показать, что в любом многоугольнике есть хотя бы один угол, меньший 180°. Тогда из того, что в правильном n-угольнике все углы равны, будет следовать, что каждый из них меньше 180°, то есть многоугольник будет выпуклым.

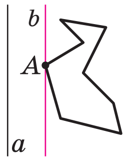


Рис. 6.11

Рассмотрим произвольный многоугольник и прямую a, не имеющую с ним общих точек (рис. 6.11). Из каждой вершины многоугольника опустим перпендикуляр на прямую a.

Сравнив длины этих перпендикуляров, мы сможем выбрать вершину многоугольника, наименее удаленную от прямой a (если таких вершин несколько, то выберем любую из них). Пусть этим свойством обладает вершина A (рис. 6.11). Через точку A проведем прямую b, параллельную прямой a. Тогда угол A многоугольника лежит в одной полуплоскости относительно прямой b. Следовательно, $\angle A < 180°$.

Вы умеете с помощью циркуля и линейки строить правильный 4-угольник, а следовательно, и 8-угольник, 16-угольник, 32-угольник, то есть любой 2^n-угольник (n — натуральное число, $n > 1$). Умение строить правильный треугольник позволяет построить следующую цепочку из правильных многоугольников: 6-угольник, 12-угольник, 24-угольник и т. д., то есть любой $3 \cdot 2^n$-угольник (n — натуральное число).

Задачу построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки изучали еще древнегреческие геометры. В частности, помимо указанных выше многоугольников, они умели строить правильные 5-угольник и 15-угольник — задачи довольно непростые.

Карл Фридрих Гаусс
(1777–1855)

Древние ученые, умевшие строить любой из правильных n-угольников, где $n = 3$, 4, 5, 6, 8, 10, пытались решить эту задачу и для $n = 7$, 9. Им это не удалось. Вообще, более двух тысяч лет математики не могли продвинуться в решении этой проблемы. Лишь в 1796 г. великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс смог с помощью циркуля и линейки построить правильный 17-угольник. В 1801 г.

Гаусс доказал, что циркулем и линейкой можно построить правильный n-угольник тогда и только тогда, когда $n = 2^k$, где $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, или $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$, где k — целое неотрицательное число, $p_1, p_2, \ldots, p_t$ — разные простые числа вида $2^{2^m} + 1$, где m — целое неотрицательное число, которые называют простыми числами Ферма[1]. Сейчас известны лишь пять простых чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Гаусс придавал своему открытию столь большое значение, что завещал изобразить 17-угольник на своем надгробии. На могильной плите Гаусса этого рисунка нет, однако памятник Гауссу в Брауншвейге стоит на семнадцатиугольном постаменте.

7. Длина окружности. Площадь круга

На рисунке 7.1 изображены правильные 4-угольник, 8-угольник и 16-угольник, вписанные в окружность.

Мы видим, что при увеличении количества сторон правильного n-угольника его периметр P_n все меньше и меньше отличается от длины C описанной окружности.

Так, для нашего примера можно записать:

$$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16}.$$

При неограниченном увеличении количества сторон правильного многоугольника его периметр будет как угодно мало отличаться от длины окружности. Это означает, что разность $C - P_n$ можно сделать меньшей, чем, например, 10^{-6}, 10^{-9}, и вообще меньшей, чем любое положительное число.

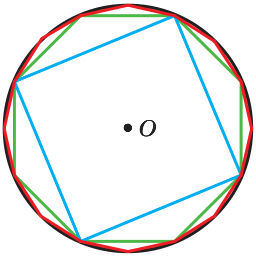


Рис. 7.1

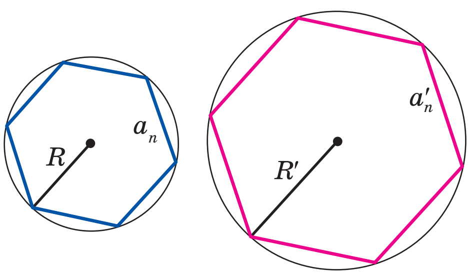


Рис. 7.2

Рассмотрим два правильных n-угольника со сторонами a_n и a'_n, вписанных в окружности, радиусы которых равны R и R' соответ-

[1] Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик, один из основателей теории чисел.

ственно (рис. 7.2). Тогда их периметры P_n и P'_n можно вычислить по формулам

$$P_n = na_n = n \cdot 2R \sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = na'_n = n \cdot 2R' \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Отсюда

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (*)$$

Это равенство справедливо при любом значении n (n — натуральное число, $n \geqslant 3$). При неограниченном увеличении значения n периметры P_n и P'_n соответственно будут сколь угодно мало отличаться от длин C и C' описанных окружностей. Тогда при неограниченном увеличении n отношение $\frac{P_n}{P'_n}$ будет сколь угодно мало отличаться от отношения $\frac{C}{C'}$. С учетом равенства (*) приходим к выводу, что число $\frac{2R}{2R'}$ сколь угодно мало отличается от числа $\frac{C}{C'}$. А это возможно только тогда, когда $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$, то есть $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Последнее равенство означает, что ***для всех окружностей отношение длины окружности к диаметру является одним и тем же числом.***

Из курса математики 6 класса вы знаете, что это число принято обозначать греческой буквой π (читают: «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности:

$$\boxed{\boldsymbol{C = 2\pi R}}$$

Число π иррациональное, следовательно, его невозможно представить в виде конечной десятичной дроби. Обычно при решении задач в качестве приближенного значения π принимают число 3,14.

Великий древнегреческий ученый Архимед (III в. до н. э.), выразив через диаметр описанной окружности периметр правильного 96-угольника, установил, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Отсюда и следует, что $\pi \approx 3{,}14$.

С помощью современных компьютеров и специальных программ можно вычислить число π с огромной точностью. Приведем запись числа π с 47 цифрами после запятой:

$\pi=3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$.

В 1989 г. число π вычислили с точностью до 1 011 196 691 цифры после запятой. Этот факт был занесен в Книгу рекордов Гиннесса. Само число в книге не приведено, так как для этого понадобилось бы более тысячи страниц. В 2017 г. уже было вычислено более 22 триллионов знаков числа π.

Найдем формулу для вычисления длины дуги окружности с градусной мерой $n°$. Поскольку градусная мера всей окружности равна $360°$, то длина дуги в $1°$ равна $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$. Тогда длину l дуги в $n°$ вычисляют по формуле

$$\boxed{\boldsymbol{l=\frac{\pi Rn}{180}}}$$

Выведем формулу для вычисления площади круга.

Обратимся снова к рисунку 7.1. Видим, что при увеличении количества сторон правильного n-угольника его площадь S_n все меньше и меньше отличается от площади S круга. При неограниченном увеличении количества сторон его площадь стремится к площади круга.

На рисунке 7.3 изображен фрагмент правильного n-угольника с центром в точке O, со стороной $AB=a_n$ и радиусом описанной окружности, равным R. Опустим перпендикуляр OM на сторону AB. Имеем:

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot OM=\frac{1}{2}a_n\cdot R\cos\frac{180°}{n}.$$

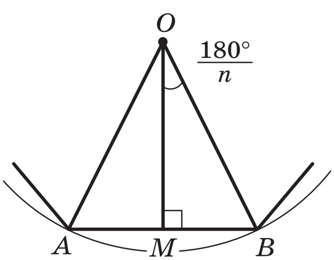


Рис. 7.3

Поскольку радиусы, проведенные в вершины правильного n-угольника, разбивают его на n равных треугольников, то площадь n-угольника S_n в n раз больше площади треугольника AOB.

Тогда $S_n=n\cdot S_{AOB}=\frac{1}{2}n\cdot a_n\cdot R\cos\frac{180°}{n}$.

Отсюда

$$S_n=\frac{1}{2}P_n\cdot R\cos\frac{180°}{n}, \qquad (**)$$

где P_n — периметр данного правильного n-угольника.

При неограниченном увеличении значения n величина $\frac{180^\circ}{n}$ будет сколь угодно мало отличаться от 0°, а следовательно, $\cos\frac{180^\circ}{n}$ будет стремиться к 1. Периметр P_n будет стремиться к длине C окружности, а площадь S_n — к площади S круга. Тогда с учетом равенства (**) можно записать: $S = \frac{1}{2}C \cdot R$.

Из этого равенства получаем формулу для нахождения площади круга:

$$\boxed{\boldsymbol{S = \pi R^2}}$$

На рисунке 7.4 радиусы OA и OB делят круг на две части, закрашенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с радиусами OA и OB называют **круговым сектором** или просто **сектором**.

Понятно, что круг радиуса R можно разделить на 360 равных секторов, каждый из которых будет содержать дугу в 1°. Площадь такого сектора равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Тогда площадь S сектора, содержащего дугу окружности в n°, вычисляют по формуле:

$$\boxed{\boldsymbol{S = \frac{\pi R^2 n}{360}}}$$

На рисунке 7.5 хорда AB делит круг на две части, закрашенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с хордой AB называют **круговым сегментом** или просто **сегментом**. Хорду AB при этом называют **основанием сегмента**.

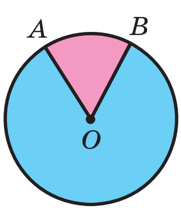


Рис. 7.4

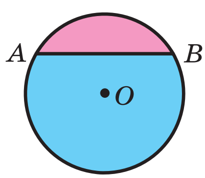


Рис. 7.5

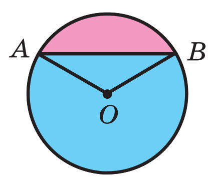


Рис. 7.6

Чтобы найти площадь сегмента, закрашенного розовым цветом (рис. 7.6), надо из площади сектора, содержащего хорду AB, вычесть площадь треугольника AOB (точка O — центр круга). Чтобы найти площадь сегмента, закрашенного голубым цветом, надо к площади сектора, не содержащего хорду AB, прибавить площадь треугольника AOB.

Если хорда AB является диаметром круга, то она делит круг на два сегмента, которые называют **полукругами**. Площадь S полукруга вычисляют по формуле $S = \frac{\pi R^2}{2}$, где R — радиус круга.

Задача 1. Длина дуги окружности, радиус которой 25 см, равна π см. Найдите градусную меру дуги.

Решение. Из формулы $l = \frac{\pi R n}{180}$ получаем $n = \frac{180 l}{\pi R}$. Следовательно, искомая градусная мера $n^\circ = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^\circ = 7{,}2^\circ$.

Ответ: 7,2°. ◄

Задача 2. В окружность с центром O, радиус которой равен 8 см, вписан правильный восьмиугольник $ABCDEFMK$ (рис. 7.7). Найдите площади сектора и сегмента, содержащих дугу AB.

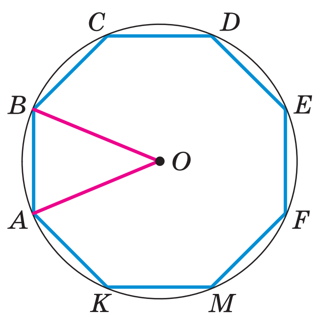


Рис. 7.7

Решение. Угол AOB — центральный угол правильного восьмиугольника, поэтому $\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Тогда искомая площадь сектора равна $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi$ (см²), площадь сегмента:

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{AOB} = 8\pi - \frac{1}{2} OA^2 \sin \angle AOB = \left(8\pi - 16\sqrt{2}\right) \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 8π см², $\left(8\pi - 16\sqrt{2}\right)$ см². ◄

?

1. Какое отношение обозначают буквой π?
2. Назовите приближенное значение числа π с точностью до сотых.
3. По какой формуле вычисляют длину окружности?
4. По какой формуле вычисляют длину дуги окружности?
5. По какой формуле вычисляют площадь круга?
6. Поясните, какую геометрическую фигуру называют круговым сектором.
7. По какой формуле вычисляют площадь кругового сектора?
8. Поясните, какую геометрическую фигуру называют круговым сегментом.
9. Поясните, как можно найти площадь кругового сегмента.

УПРАЖНЕНИЯ

7.1.° Найдите длину окружности, диаметр которой равен:
1) 1,2 см; 2) 3,5 см.

7.2.° Найдите длину окружности, радиус которой равен:
1) 6 см; 2) 1,4 м.

7.3.° Найдите площадь круга, радиус которого равен:
1) 4 см; 2) 14 дм.

7.4.° Найдите площадь круга, диаметр которого равен:
1) 20 см; 2) 3,2 дм.

7.5.° Найдите площадь круга, длина окружности которого равна l.

7.6.° Вычислите площадь поперечного сечения дерева, которое в обхвате составляет 125,6 см.

7.7.° Как изменится длина окружности, если ее радиус:
1) увеличить в 2 раза; 2) уменьшить в 3 раза?

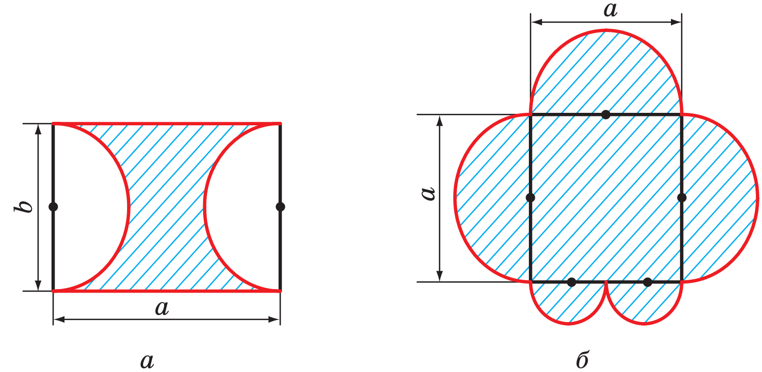
7.8.° Радиус окружности увеличили на 1 см. На сколько увеличилась при этом длина окружности?

7.9.° Длина земного экватора приближенно равна 40 000 000 м. Считая, что Земля имеет форму шара, вычислите ее радиус в километрах.

7.10.° Вычислите длину красной линии, изображенной на рисунке 7.8.

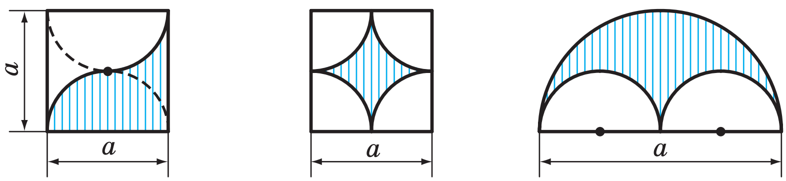
7.11.° Как изменится площадь круга, если его радиус:
1) увеличить в 4 раза; 2) уменьшить в 5 раз?

7.12.° Вычислите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 7.9.



а *б*

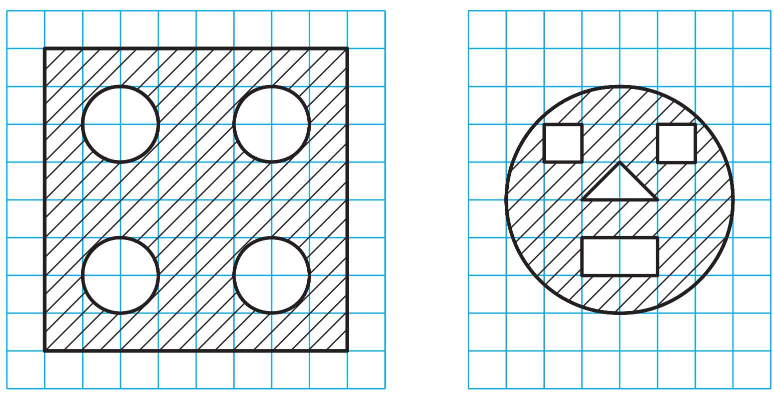
Рис. 7.8



а *б* *в*

Рис. 7.9

7.13.° Вычислите площадь заштрихованной фигуры (рис. 7.10), если длина стороны клетки равна a.



а *б*

Рис. 7.10

7.14.° Продаются блинчики двух видов: диаметром 30 см и 20 см. Если толщина всех блинчиков одинакова, то в каком случае покупатель съест больше: когда съест один большой блинчик или два меньших?

7.15.° Найдите длину окружности, описанной около правильного треугольника со стороной a.

7.16.° Найдите длину окружности, вписанной в квадрат со стороной a.

7.17.° Найдите площадь круга, описанного около квадрата со стороной a.

7.18.° Найдите площадь круга, вписанного в правильный шестиугольник со стороной a.

7.19.° Найдите площадь круга, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

7.20.° Найдите площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами a и b.

7.21.° Найдите площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника с боковой стороной b и углом α при основании.

7.22.° Найдите длину окружности, описанной около прямоугольника со стороной a и углом α между данной стороной и диагональю прямоугольника.

7.23.° Радиус окружности равен 8 см. Найдите длину дуги окружности, градусная мера которой равна:

1) 4°; 2) 18°; 3) 160°; 4) 320°.

7.24.° Длина дуги окружности равна 12π см, а ее градусная мера — 27°. Найдите радиус окружности.

7.25.° Длина дуги окружности радиуса 24 см равна 3π см. Найдите градусную меру дуги.

7.26.° Вычислите длину дуги экватора Земли, градусная мера которой равна 1°, если радиус экватора приближенно равен 6400 км.

7.27.° Радиус круга равен 6 см. Найдите площадь сектора, если градусная мера его дуги равна:

1) 15°; 2) 144°; 3) 280°.

7.28.° Площадь сектора составляет $\frac{5}{8}$ площади круга. Найдите градусную меру его дуги.

7.29.° Площадь сектора равна 6π дм^2. Найдите градусную меру дуги этого сектора, если радиус круга равен 12 дм.

7.30.° Площадь сектора равна $\frac{5\pi}{4}$ см^2, а градусная мера дуги этого сектора составляет 75°. Найдите радиус круга, частью которого является данный сектор.

7.31.° Может ли сектор круга быть его сегментом?

7.32.° Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 5 см, а градусная мера дуги сегмента равна:
1) 45°; 2) 150°; 3) 330°.

7.33.° Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 2 см, а градусная мера дуги сегмента равна:
1) 60°; 2) 300°.

7.34.• Колеса автомобиля имеют диаметр 65 см. Автомобиль едет с такой скоростью, что колеса делают ежесекундно 6 оборотов. Найдите скорость автомобиля в километрах в час. Ответ округлите до десятых.

7.35.• Найдите длину дуги, которую описывает часовая стрелка длиной 6 см за 1 ч.

7.36.• Найдите длину дуги, которую описывает минутная стрелка длиной 24 см за 40 мин.

7.37.• Радиус окружности увеличили на a. Докажите, что длина окружности увеличилась на величину, не зависящую от радиуса данной окружности.

7.38.• Сторона треугольника равна 6 см, а прилежащие к ней углы равны 50° и 100°. Найдите длины дуг, на которые вершины треугольника делят описанную около него окружность.

7.39.• Сторона треугольника равна $5\sqrt{3}$ см, а прилежащие к ней углы равны 35° и 25°. Найдите длины дуг, на которые вершины треугольника делят описанную около него окружность.

7.40.• На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, принадлежащей треугольнику, если $\angle A = 24°$, $AC = 20$ см.

7.41.• Угол при основании равнобедренного треугольника равен 70°. На высоте треугольника, проведенной к основанию и равной 27 см, как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги окружности, принадлежащей треугольнику.

7.42.• Отрезок AB разбили на n отрезков. На каждом из них как на диаметре построили полуокружность. Это действие повторили, разбив данный отрезок на m отрезков. Найдите отношение сумм длин полуокружностей, полученных в первом и втором случаях.

7.43.° Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника как на диаметре (рис. 7.11), равна сумме площадей полукругов, построенных на его катетах как на диаметрах.

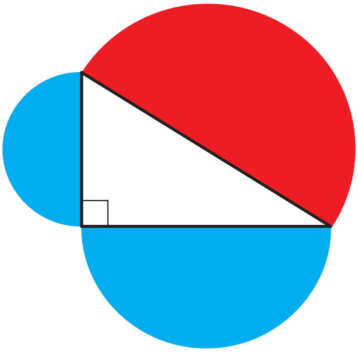


Рис. 7.11

7.44.° Две трубы, диаметры которых равны 30 см и 40 см, надо заменить одной трубой с такой же пропускной способностью[1]. Каким должен быть диаметр этой трубы?

7.45.° На сколько процентов увеличится площадь круга, если его радиус увеличить на 10 %?

7.46.° В круг вписан квадрат со стороной a. Найдите площадь меньшего из сегментов, основанием которых является сторона квадрата.

7.47.° Из листа жести, имеющего форму круга, вырезали правильный шестиугольник наибольшей площади. Сколько процентов жести пошло в отходы?

7.48.° В круг вписан правильный треугольник со стороной a. Найдите площадь меньшего из сегментов, основанием которых является сторона треугольника.

7.49.° В круговой сектор, радиус которого равен R, а центральный угол составляет $60°$, вписан круг. Найдите площадь этого круга.

[1] Пропускная способность водопроводной трубы — это масса воды, которая проходит через поперечное сечение трубы за единицу времени.

7.50.•• Найдите площадь розетки (заштрихованной фигуры), изображенной на рисунке 7.12, если сторона квадрата $ABCD$ равна a.

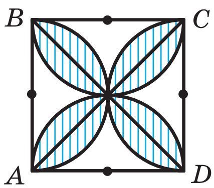


Рис. 7.12

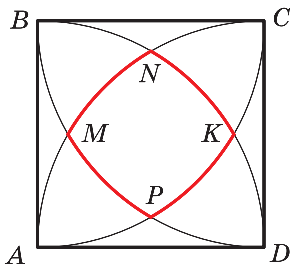


Рис. 7.13

7.51.•• При построении четырех дуг с центрами в вершинах квадрата $ABCD$ и радиусами, равными стороне a квадрата, образовалась фигура, ограниченная красной линией (рис. 7.13). Найдите длину этой линии, если длина стороны квадрата равна a.

7.52.•• (Задача Гиппократа[1]). Около прямоугольника описали окружность и на каждой его стороне как на диаметре построили полуокружность (рис. 7.14). Докажите, что сумма площадей закрашенных фигур (луночек Гиппократа) равна площади прямоугольника.

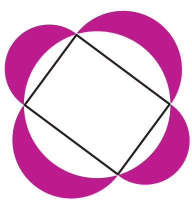


Рис. 7.14

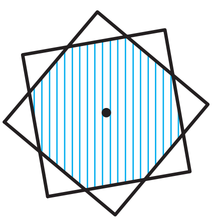


Рис. 7.15

7.53.•• Два квадрата со сторонами 1 см имеют общий центр (рис. 7.15). Докажите, что площадь их общей части больше, чем $\frac{3}{4}$.

[1] Гиппократ Хиосский — древнегреческий геометр (V в. до н. э.).

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

7.54. Найдите сторону ромба, если его высота равна 6 см, а угол между стороной ромба и одной из диагоналей равен 15°.

7.55. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ делит его сторону BC на отрезки BM и MC длиной 10 см и 14 см соответственно. На отрезки какой длины эта биссектриса делит диагональ прямоугольника?

7.56. Сумма углов при большем основании трапеции равна 90°. Докажите, что расстояние между серединами оснований трапеции равно полуразности оснований.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

7.57. Чему равно расстояние между точками A и B координатной прямой, если:

1) A (3) и B (7);
2) A (−2) и B (4);
3) A (−2) и B (−6);
4) A (a) и B (b)?

7.58. Начертите на координатной плоскости отрезок AB, найдите по рисунку координаты середины отрезка и сравните их со средним арифметическим соответствующих координат точек A и B, если:

1) A (−1; −6), B (5; −6);
2) A (3; 1), B (3; 5);
3) A (3; −5), B (−1; 3).

7.59. Постройте на координатной плоскости треугольник ABC и найдите его стороны, если A (5; −1), B (−3; 5), C (−3; −1).

7.60. В какой координатной четверти находится точка:

1) A (3; −4);
2) B (−3; 1);
3) C (−4; −5);
4) D (1; 9)?

7.61. В какой координатной четверти находится точка M, если:

1) ее абсцисса положительна, а ордината отрицательна;
2) произведение ее абсциссы и ординаты — отрицательное число;
3) ее абсцисса и ордината отрицательны?

7.62. Что можно сказать о координатах точки A, если:

1) точка A лежит на оси абсцисс;
2) точка A лежит на оси ординат;
3) точка A лежит на биссектрисе четвертого координатного угла;
4) точка A лежит на биссектрисе третьего координатного угла;
5) точка A лежит на биссектрисе первого координатного угла?

7.63. Укажите координаты вершин прямоугольника $ABCD$ (рис. 7.16).

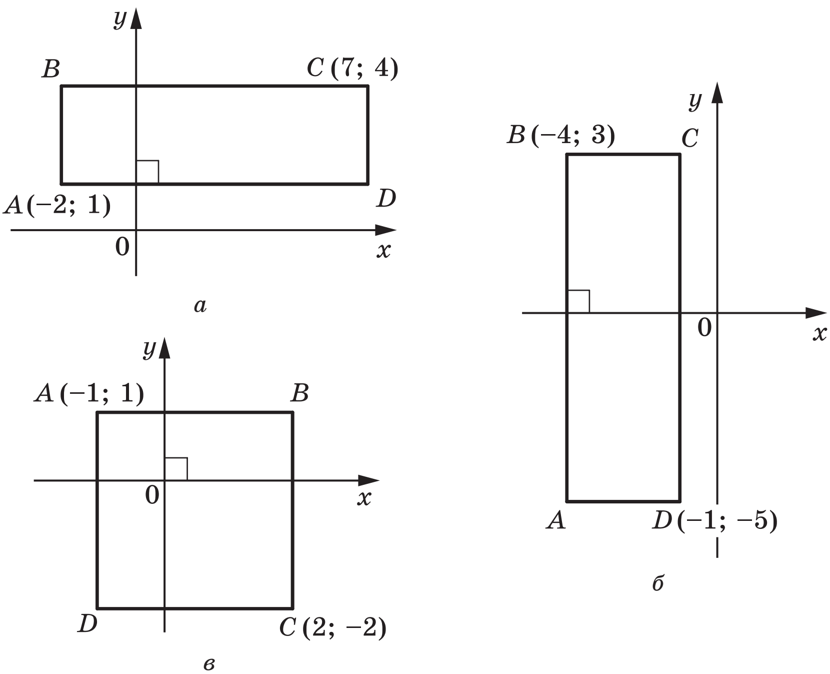


Рис. 7.16

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

7.64. На плоскости отметили несколько точек. Некоторые из них отметили красным цветом, остальные — синим. Известно, что точек каждого цвета не меньше трех и никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то три точки одного цвета являются вершинами треугольника, на сторонах которого может лежать не более двух точек другого цвета.

ЗАДАНИЕ № 2 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Найдите количество сторон правильного многоугольника, если его угол равен 170°.
А) 30;
Б) 32;
В) 36;
Г) такого многоугольника не существует.

2. Чему равен центральный угол правильного десятиугольника?
А) 18°; Б) 36°; В) 144°; Г) 10°.

3. Какой наибольший центральный угол может иметь правильный многоугольник?
А) 90°; В) 150°;
Б) 120°; Г) указать невозможно.

4. В окружность вписан правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Чему равна сторона треугольника, описанного около этой окружности?
А) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; Б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; В) $a\sqrt{3}$; Г) $2a\sqrt{3}$.

5. Чему равен радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, меньшая диагональ которого равна 12 см?
А) 6 см; Б) $6\sqrt{3}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) 12 см.

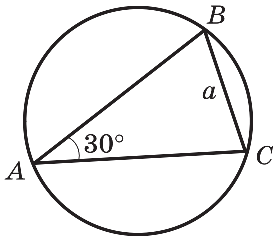
6. Найдите длину дуги окружности, градусная мера которой равна 207°, если радиус окружности — 4 см.
А) 23 см; Б) 4,6 см; В) 23π см; Г) 4,6π см.

7. Какую часть площади круга составляет площадь сектора, центральный угол которого равен 140°?
А) $\frac{7}{9}$; Б) $\frac{7}{12}$; В) $\frac{7}{15}$; Г) $\frac{7}{18}$.

8. Вписанный в окружность угол, равный 40°, опирается на дугу длиной 8 см. Какова длина данной окружности?
А) 72 см; Б) 72π см; В) 36 см; Г) 36π см.

9. Какой должна быть длина хорды окружности, радиус которой равен R, чтобы длины дуг, на которые концы этой хорды делят окружность, относились как 2 : 1?
А) R; Б) $2R$; В) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; Г) $R\sqrt{3}$.

10. На рисунке изображен вписанный в окружность треугольник ABC, $\angle A = 30°$, $BC = a$. Чему равна площадь сегмента, основание которого стягивает дугу BAC?



А) $\dfrac{a^2\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12}$; В) $\dfrac{a^2\left(10\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

Б) $\dfrac{a^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$; Г) $\dfrac{a^2\left(10\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$.

11. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 20°$, $\angle C = 30°$, $AC = 14$ см. Окружность с центром в точке A касается прямой BC. Найдите длину дуги этой окружности, принадлежащей треугольнику ABC.

А) $\dfrac{7\pi}{18}$ см; Б) $\dfrac{7\pi}{9}$ см; В) $\dfrac{7\pi}{12}$ см; Г) $\dfrac{7\pi}{6}$ см.

12. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен $6\sqrt{3}$ см, а радиус вписанной в него окружности — 9 см. Сколько сторон имеет многоугольник?

А) 6; Б) 12; В) 9; Г) 18.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 2

Правильный многоугольник

Многоугольник называют правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

Свойства правильного многоугольника

Правильный многоугольник является выпуклым многоугольником.
Любой правильный многоугольник является как вписанным в окружность, так и описанным около окружности, причем центры описанной и вписанной окружностей совпадают.

Формулы для нахождения радиусов описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника

Количество сторон правильного n-угольника со стороной a	n	$n=3$	$n=4$	$n=6$
Радиус описанной окружности	$R_n = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радиус вписанной окружности	$r_n = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Длина окружности

$C = 2\pi R$

Длина дуги окружности в n°

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

Площадь круга

$S = \pi R^2$

Площадь сектора, содержащего дугу окружности в n°

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 3

Изучая материал этого параграфа, вы расширите свои знания о координатной плоскости.

Вы научитесь находить длину отрезка и координаты его середины, зная координаты его концов.

Сформируете представление об уравнении фигуры, выведете уравнения прямой и окружности.

Ознакомитесь с методом координат, позволяющим решать геометрические задачи средствами алгебры.

8. Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка

В 6 классе вы ознакомились с координатной плоскостью, то есть с плоскостью, на которой изображены две перпендикулярные координатные прямые (ось абсцисс и ось ординат) с общим началом отсчета (рис. 8.1). Вы умеете отмечать на ней точки по их координатам и наоборот, находить координаты точки, отмеченной на координатной плоскости.

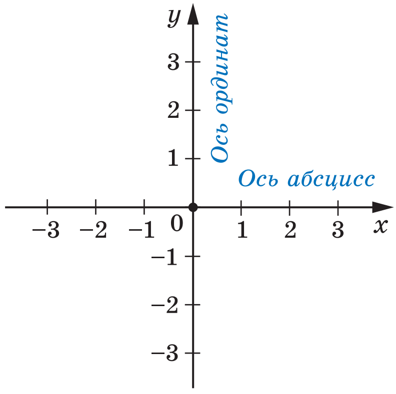


Рис. 8.1

Договорились координатную плоскость с осью x (осью абсцисс) и осью y (осью ординат) называть **плоскостью** $\boldsymbol{xy}$.

Координаты точки на плоскости xy называют **декартовыми координатами** в честь французского математика Рене Декарта (см. рассказ на с. 103).

Вы знаете, как находить расстояние между двумя точками, заданными своими координатами на координатной прямой. Для точек A (x_1) и B (x_2) (рис. 8.2) имеем:

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Рис. 8.2

Научимся находить расстояние между точками A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$, заданными на плоскости xy.

Рассмотрим случай, когда отрезок AB не перпендикулярен ни одной из координатных осей (рис. 8.3).

Через точки A и B проведем прямые, перпендикулярные координатным осям. Получим прямоугольный треугольник ACB, в котором $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$. Отсюда $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Тогда формулу расстояния между точками A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ можно записать так:

$$\boxed{\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}}$$

Докажите самостоятельно, что эта формула остается верной и для случая, когда отрезок AB перпендикулярен одной из осей координат.

Пусть A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ — точки плоскости xy. Найдем координаты $(x_0; y_0)$ точки M — середины отрезка AB.

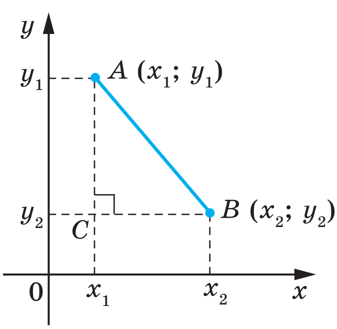


Рис. 8.3

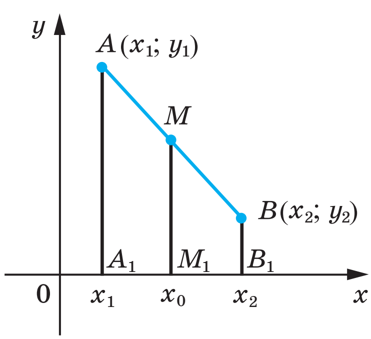


Рис. 8.4

Рассмотрим случай, когда отрезок AB не перпендикулярен ни одной из координатных осей (рис. 8.4). Будем считать, что $x_2 > x_1$ (случай, когда $x_2 < x_1$, рассматривается аналогично). Через точки A, M и B проведем прямые, перпендикулярные оси абсцисс, которые пересекут эту ось соответственно в точках A_1, M_1 и B_1. По теореме Фалеса $A_1M_1 = M_1B_1$, тогда $|x_0 - x_1| = |x_2 - x_0|$. Поскольку $x_2 > x_0 > x_1$, то можем записать: $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$. Отсюда

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Аналогично можно показать, что

$$\boxed{y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Формулы для нахождения координат середины отрезка остаются верными и для случая, когда отрезок AB перпендикулярен одной из осей координат. Докажите это самостоятельно.

Задача 1. Докажите, что треугольник с вершинами в точках A $(-1; 7)$, B $(1; 3)$ и C $(5; 5)$ является равнобедренным прямоугольным.

Решение. Используя формулу расстояния между двумя точками, найдем стороны данного треугольника:

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20};$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20};$$

$$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Следовательно, $AB = BC$, то есть треугольник ABC равнобедренный.

Поскольку $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, то треугольник ABC прямоугольный. ◄

Задача 2. Точка $M(2; -5)$ — середина отрезка AB, $A(-1; 3)$. Найдите координаты точки B.

Решение. Обозначим $(x_B; y_B)$ — координаты точки B, $(x_A; y_A)$ — координаты точки A, $(x_M; y_M)$ — координаты точки M.

Поскольку $\dfrac{x_A + x_B}{2} = x_M$, то получаем: $\dfrac{-1 + x_B}{2} = 2$; $-1 + x_B = 4$; $x_B = 5$.

Аналогично $\dfrac{y_A + y_B}{2} = y_M$; $\dfrac{3 + y_B}{2} = -5$; $y_B = -13$.

Ответ: B $(5; -13)$. ◄

Задача 3. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (2; −1), B (1; 3), C (−3; 2) и D (−2; −2) является прямоугольником.

Решение. Пусть точка M — середина диагонали AC. Тогда

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-3}{2} = -0{,}5; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5.$$

Следовательно, M (−0,5; 0,5).

Пусть точка K — середина диагонали BD. Тогда

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1-2}{2} = -0{,}5; \quad y_K = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3-2}{2} = 0{,}5.$$

Следовательно, K (−0,5; 0,5).

Таким образом, точки M и K совпадают, то есть диагонали четырехугольника $ABCD$ имеют общую середину. Отсюда следует, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Найдем диагонали параллелограмма:

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34},$$
$$BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Следовательно, диагонали параллелограмма $ABCD$ равны. Отсюда следует, что этот параллелограмм является прямоугольником. ◄

1. Как найти расстояние между двумя точками, если известны их координаты?
2. Как найти координаты середины отрезка, если известны координаты его концов?

УПРАЖНЕНИЯ

8.1.° Найдите расстояние между точками A и B, если:
1) A (10; 14), B (5; 2); 2) A (−1; 2), B (4; −3).

8.2.° Найдите расстояние между точками C и D, если:
1) C (−2; −4), D (4; −12); 2) C (6; 3), D (7; −1).

8.3.° Вершинами треугольника являются точки A (−1; 3), B (5; 9), C (6; 2). Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

8.4.° Докажите, что точка M (0; −1) является центром окружности, описанной около треугольника ABC, если A (6; −9), B (−6; 7), C (8; 5).

8.5.° Докажите, что углы B и C треугольника ABC равны, если A (5; −7), B (−3; 8), C (−10; −15).

8.6.° Найдите координаты середины отрезка BC, если:
1) B (5; 4), C (3; 2); 2) B (−2; −1), C (−1; 7).

8.7.° Точка C — середина отрезка AB. Найдите координаты точки B, если:
1) A (3; −4), C (2; 1); 2) A (−1; 1), C (0,5; −1).

8.8.° Точка K — середина отрезка AD. Заполните таблицу:

Точка	Координаты точки		
A	(−3; 1)	(−8; 2)	
D	(−1; −3)		(−9; 2)
K		(−4; 6)	(1; 2)

8.9.° Найдите медиану BM треугольника, вершинами которого являются точки A (3; −2), B (2; 3) и C (7; 4).

8.10.° Даны точки A (−2; 4) и B (2; −8). Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB.

8.11.• Докажите, что треугольник с вершинами в точках A (2; 7), B (−1; 4) и C (1; 2) является прямоугольным.

8.12.• Точки A (−1; 2) и B (7; 4) являются вершинами прямоугольного треугольника. Может ли третья вершина треугольника иметь координаты: 1) (7; 2); 2) (2; −3)?

8.13.• Лежат ли на одной прямой точки:
1) A (−2; −7), B (−1; −4) и C (5; 14);
2) D (−1; 3), E (2; 13) и F (5; 21)?
В случае утвердительного ответа укажите, какая из точек лежит между двумя другими.

8.14.• Докажите, что точки M (−4; 5), N (−10; 7) и K (8; 1) лежат на одной прямой, и укажите, какая из них лежит между двумя другими.

8.15.• При каком значении x расстояние между точками C (3; 2) и D (x; −1) равно 5?

8.16.• На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек A (−1; −1) и B (2; 4).

8.17.• Найдите координаты точки, принадлежащей оси ординат и равноудаленной от точек D (−2; −3) и E (4; 1).

8.18.• Найдите координаты точки, которая делит отрезок AB в отношении $1 : 3$, считая от точки A, если $A(5; -3)$ и $B(-3; 7)$.

8.19.• Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, $A(-5; 1)$, $B\ (-4; 4)$, $C\ (-1; 5)$. Найдите координаты вершины D.

8.20.• Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, $A(-2; -2)$, $C(4; 1)$, $D(-1; 1)$. Найдите координаты вершины B.

8.21.• Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-2; 8)$, $B(3; -3)$, $C(6; 2)$ и $D(1; 13)$ является параллелограммом.

8.22.• Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (-3; -2)$, $B\ (-1; 2)$, $C\ (1; -2)$ и $D\ (-1; -6)$ является ромбом.

8.23.• Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (-2; 6)$, $B\ (-8; -2)$, $C\ (0; -8)$ и $D\ (6; 0)$ является квадратом.

8.24.• Точки $D\ (1; 4)$ и $E\ (2; 2)$ — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. Найдите координаты вершин A и C, если $B\ (-3; -1)$.

8.25.• Найдите длину отрезка, концы которого принадлежат осям координат, а серединой является точка $M\ (-3; 8)$.

8.26.•• Найдите координаты вершины C равностороннего треугольника ABC, если $A\ (2; -3)$ и $B\ (-2; 3)$.

8.27.•• Найдите координаты вершины E равностороннего треугольника DEF, если $D\ (-6; 0)$ и $F\ (2; 0)$.

8.28.•• В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $A\ (5; 9)$, $C\ (1; -3)$, модули координат точки B равны. Найдите координаты точки B.

8.29.•• Найдите координаты всех точек C оси абсцисс таких, что треугольник ABC равнобедренный и $A\ (1; 1)$, $B\ (2; 3)$.

8.30.•• Найдите координаты всех точек B оси ординат таких, что треугольник ABC прямоугольный и $A\ (1; 3)$, $C\ (3; 7)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

8.31. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AB = 9$ см, $BC = 3$ см. На гипотенузе AB отметили точку M так, что $AM : MB = 1 : 2$. Найдите отрезок CM.

8.32. Найдите углы ромба, если угол между высотой и диагональю ромба, проведенными из одной вершины, равен $28°$.

8.33. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ равна 24 см, точка E — середина стороны BC. Найдите отрезки, на которые прямая AE делит диагональ BD.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

8.34. Точка A (1; −6) — центр окружности, точка B (10; 6) принадлежит этой окружности. Чему равен радиус окружности?

8.35. Отрезок CD — диаметр окружности. Найдите координаты центра окружности и радиус окружности, если C (6; −4), D (−2; 10).

8.36. Какая фигура является графиком уравнения:

1) $y=1$;
2) $y=3x-4$;
3) $x=-2$;
4) $(x+2)^2+(y-3)^2=0$;
5) $xy=1$;
6) $y=\sqrt{x}$?

9. Уравнение фигуры. Уравнение окружности

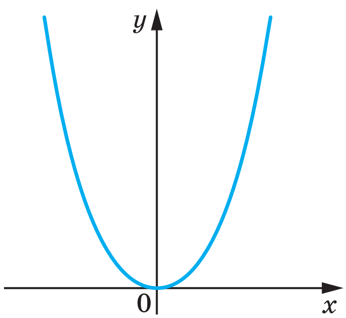


Рис. 9.1

Из курса алгебры 7 класса вы знаете, какую фигуру называют графиком уравнения. В этом пункте вы ознакомитесь с понятием уравнения фигуры.

Координаты $(x; y)$ каждой точки параболы, изображенной на рисунке 9.1, являются решением уравнения $y=x^2$. И наоборот, каждое решение уравнения с двумя переменными $y=x^2$ является координатами точки, лежащей на этой параболе. В этом случае говорят, что уравнение параболы, изображенной на рисунке 9.1, имеет вид $y=x^2$.

Определение. Уравнением фигуры *F*, заданной на плоскости *xy*, называют уравнение с двумя переменными *x* и *y*, обладающее следующими свойствами:

1) **если точка принадлежит фигуре *F*, то ее координаты являются решением данного уравнения;**
2) **любое решение $(x; y)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре *F*.**

Например, уравнение прямой, изображенной на рисунке 9.2, имеет вид $y=2x-1$, а уравнение гиперболы, изображенной на рисунке 9.3, имеет вид $y=\frac{1}{x}$. Принято говорить, что, например, уравнения $y=2x-1$ и $y=\frac{1}{x}$ **задают** прямую и гиперболу соответственно.

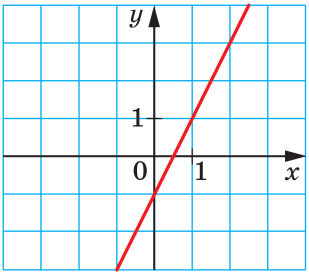


Рис. 9.2

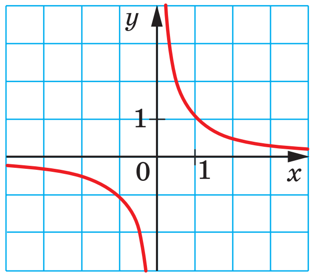


Рис. 9.3

Если данное уравнение является уравнением фигуры F, то эту фигуру можно рассматривать как геометрическое место точек (ГМТ), координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

Пользуясь этими соображениями, выведем уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A\ (a;\ b)$.

Пусть $M\ (x;\ y)$ — произвольная точка данной окружности (рис. 9.4). Тогда $AM = R$. Используя формулу расстояния между точками, получим:

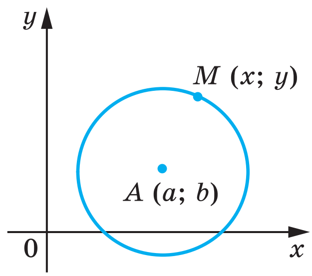


Рис. 9.4

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R.$$

Отсюда

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (*)$$

Мы показали, что координаты $(x;\ y)$ произвольной точки M данной окружности являются решением уравнения (*). Теперь покажем, что любое решение уравнения $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ является координатами точки, принадлежащей данной окружности.

Пусть пара чисел $(x_1;\ y_1)$ — произвольное решение уравнения (*). Тогда $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=R^2$. Отсюда $\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2} = R.$

Это равенство показывает, что точка $N\ (x_1;\ y_1)$ удалена от центра окружности $A\ (a;\ b)$ на расстояние, равное радиусу окружности, а следовательно, точка $N\ (x_1;\ y_1)$ принадлежит данной окружности.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 9.1. ***Уравнение окружности радиуса R с центром в точке A (a; b) имеет вид***

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$

Верно и такое утверждение: *любое уравнение вида* $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, *где* a, b *и* R *— некоторые числа, причем* $R>0$, *является уравнением окружности радиуса* R *с центром в точке с координатами* $(a; b)$.

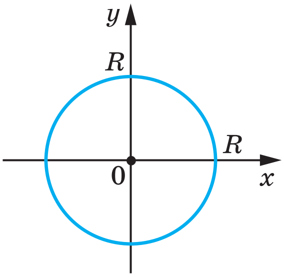


Рис. 9.5

Если центром окружности является начало координат (рис. 9.5), то $a=b=0$. В этом случае уравнение окружности имеет вид

$$x^2+y^2=R^2.$$

Задача 1. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если $A\ (-5; 9)$, $B\ (7; -3)$.

Решение. Поскольку центр окружности является серединой диаметра, то можем найти координаты $(a; b)$ центра C окружности:

$$a=\frac{-5+7}{2}=1,$$

$$b=\frac{9-3}{2}=3.$$

Следовательно, $C\ (1; 3)$.

Радиус окружности R равен отрезку AC. Тогда

$$R^2=(1+5)^2+(3-9)^2=72.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$(x-1)^2+(y-3)^2=72.$$

Ответ: $(x-1)^2+(y-3)^2=72$. ◄

Задача 2. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+6x-14y+50=0$ задает окружность. Найдите координаты центра и радиус этой окружности.

Решение. Представим данное уравнение в виде $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$:

$$x^2+6x+9+y^2-14y+49+50-58=0;$$

$$(x+3)^2+(y-7)^2=8.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(-3; 7)$ и радиусом $2\sqrt{2}$.

Ответ: $(-3; 7)$, $2\sqrt{2}$. ◄

Задача 3. Докажите, что треугольник с вершинами в точках $A\ (-2; -3)$, $B\ (1; 3)$ и $C\ (5; 1)$ является прямоугольным, и составьте уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Найдем квадраты сторон данного треугольника:

$$AB^2=(1+2)^2+(3+3)^2=45;$$
$$AC^2=(5+2)^2+(1+3)^2=65;$$
$$BC^2=(5-1)^2+(1-3)^2=20.$$

Поскольку $AB^2+BC^2=AC^2$, то данный треугольник является прямоугольным с прямым углом при вершине B. Центром описанной окружности является середина гипотенузы AC — точка $(1{,}5;\ -1)$, радиус окружности $R=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{65}}{2}$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$(x-1{,}5)^2+(y+1)^2=\frac{65}{4}.$$

Ответ: $(x-1{,}5)^2+(y+1)^2=\frac{65}{4}$. ◀

?

1. Что называют уравнением фигуры, заданной на плоскости xy?
2. Какой вид имеет уравнение окружности с центром в точке $(a;\ b)$ и радиусом R?
3. Какой вид имеет уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R?

УПРАЖНЕНИЯ

9.1.° Определите по уравнению окружности координаты ее центра и радиус:

1) $(x-8)^2+(y-3)^2=25$;
2) $(x+5)^2+y^2=9$;
3) $x^2+y^2=7$;
4) $x^2+(y+1)^2=3$.

9.2.° Составьте уравнение окружности, если известны координаты ее центра A и радиус R:

1) $A\ (3;\ 4)$, $R=4$;
2) $A\ (-2;\ 0)$, $R=1$;
3) $A\ (7;\ -6)$, $R=\sqrt{2}$;
4) $A\ (0;\ 5)$, $R=\sqrt{7}$.

9.3.° Составьте уравнение окружности, если известны координаты ее центра B и радиус R:

1) $B\ (-1;\ 9)$, $R=9$;
2) $B\ (-8;\ -8)$, $R=\sqrt{3}$.

9.4.° Определите координаты центра и радиус окружности, изображенной на рисунке 9.6, и запишите уравнение этой окружности.

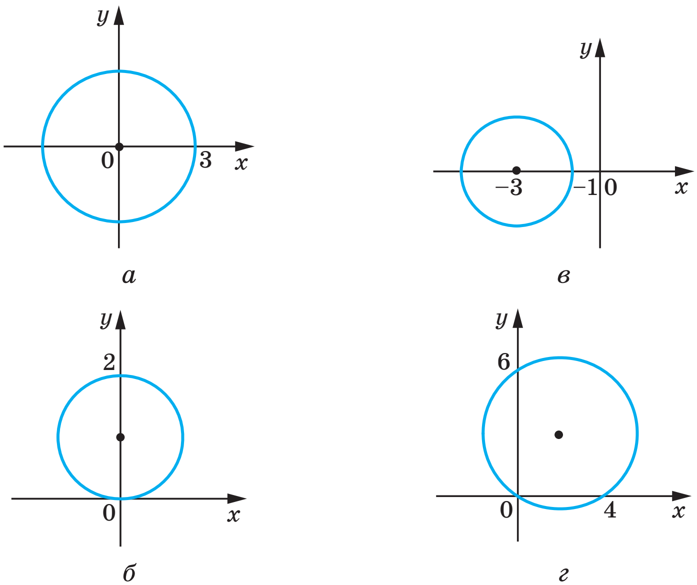


Рис. 9.6

9.5.° Радиус окружности с центром в точке A равен 4 (рис. 9.7). Составьте уравнение этой окружности.

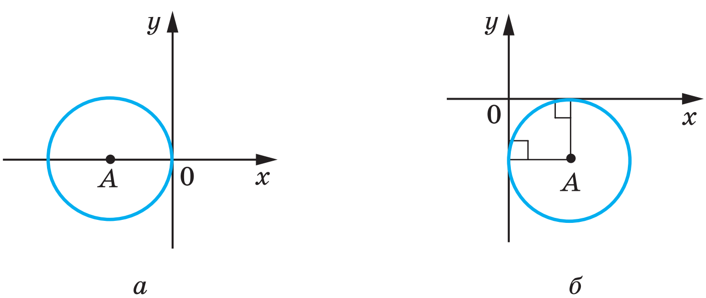


Рис. 9.7

9.6.° Постройте на координатной плоскости окружность, уравнение которой имеет вид:

1) $x^2+y^2=4$; 2) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

9.7.° Постройте на координатной плоскости окружность, уравнение которой имеет вид $(x-4)^2+y^2=9$.

9.8.° Окружность задана уравнением $(x+6)^2+(y-1)^2=10$. Выясните, какие из точек A $(-3; 0)$, B $(-5; -2)$, C $(1; 0)$, D $(-4; 3)$, E $(-7; -3)$, F $(-9; 0)$ лежат: 1) на окружности; 2) внутри окружности; 3) вне окружности.

9.9.° Принадлежит ли окружности $(x-2)^2+(y+2)^2=100$ точка:
1) A $(8; -8)$; 2) B $(6; -9)$; 3) C $(-3; 7)$; 4) D $(-4; 6)$?

9.10.° Составьте уравнение окружности с центром в точке M $(-3; 1)$, проходящей через точку K $(-1; 5)$.

9.11.° Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если A $(2; -7)$, B $(-2; 3)$.

9.12.• Докажите, что отрезок AB является диаметром окружности $(x-5)^2+(y+4)^2=17$, если A $(1; -5)$, B $(9; -3)$.

9.13.• Докажите, что отрезок CD является хордой окружности $x^2+(y-9)^2=169$, если C $(5; -3)$, D $(-12; 4)$.

9.14.• Составьте уравнение окружности, центром которой является точка P $(-6; 7)$ и которая касается оси ординат.

9.15.• Составьте уравнение окружности, центр которой находится на прямой $y=-5$ и которая касается оси абсцисс в точке S $(2; 0)$.

9.16.• Сколько существует окружностей, проходящих через точку $(3; 5)$, радиусы которых равны $3\sqrt{5}$ и центры которых принадлежат оси ординат? Запишите уравнение каждой такой окружности.

9.17.• Составьте уравнение окружности, которая проходит через точки A $(-4; 1)$ и B $(8; 5)$ и центр которой принадлежит оси абсцисс.

9.18.• Докажите, что окружность $(x+6)^2+(y-3)^2=36$:
1) касается оси ординат;
2) пересекает ось абсцисс;
3) не имеет общих точек с прямой $y=10$.

9.19.•• Установите, является ли данное уравнение уравнением окружности. В случае утвердительного ответа укажите координаты центра и радиус этой окружности:
1) $x^2+2x+y^2-10y-23=0$;
2) $x^2-12x+y^2+4y+40=0$;
3) $x^2+y^2+6y+8x+34=0$;
4) $x^2+y^2-4x-14y+51=0$.

9.20.•• Докажите, что данное уравнение является уравнением окружности, и укажите координаты центра и радиус R этой окружности:
1) $x^2+y^2+16y+60=0$;
2) $x^2+y^2-8x+4y+15=0$.

9.21.•• Докажите, что треугольник с вершинами в точках A $(-1; -2)$, B $(-1; 2)$, C $(5; 2)$ является прямоугольным, и составьте уравнение окружности, описанной около этого треугольника.

9.22.•• Составьте уравнение окружности, радиус которой равен 5 и которая проходит через точки C $(-1; 5)$ и D $(6; 4)$.

9.23.•• Составьте уравнение окружности, радиус которой равен $\sqrt{10}$ и которая проходит через точки M $(-2; 1)$ и K $(-4; -1)$.

9.24.•• Составьте уравнение окружности, касающейся координатных осей и прямой $y=-4$.

9.25.•• Составьте уравнение окружности, касающейся координатных осей и прямой $x=2$.

9.26.* Составьте уравнение окружности, проходящей через точки:
1) A $(-3; 7)$, B $(-8, 2)$, C $(-6, -2)$;
2) M $(-1; 10)$, N $(12; -3)$, K $(4; 9)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

9.27. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке E, $AB=BE=12$ см, $ED=18$ см. Найдите площадь параллелограмма.

9.28. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит эту диагональ на отрезки длиной 9 см и 16 см. Найдите периметр прямоугольника.

9.29. В равнобокую трапецию вписана окружность радиуса 12 см. Одна из боковых сторон точкой касания делится на два отрезка, один из которых равен 16 см. Найдите площадь трапеции.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

9.30. На плоскости отметили точки A и B. С помощью одного лишь циркуля постройте точку C такую, чтобы точка B являлась серединой отрезка AC.

10. Уравнение прямой

В предыдущем пункте, рассматривая окружность как ГМТ, равноудаленных от данной точки, мы вывели ее уравнение. Для того чтобы вывести уравнение прямой, рассмотрим ее как ГМТ, равноудаленных от двух данных точек.

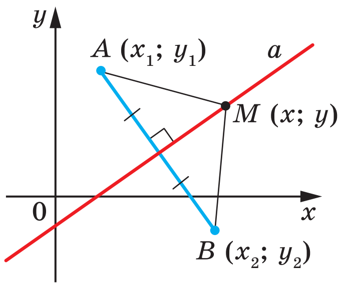


Рис. 10.1

Пусть a — данная прямая. Выберем две точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ так, чтобы прямая a была серединным перпендикуляром отрезка AB (рис. 10.1).

Пусть $M\ (x;\ y)$ — произвольная точка прямой a. Тогда по свойству серединного перпендикуляра отрезка выполняется равенство $MA = MB$, то есть

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}. \qquad (*)$$

Мы показали, что координаты $(x;\ y)$ произвольной точки M прямой a являются решением уравнения (*).

Теперь покажем, что любое решение уравнения (*) является координатами точки, принадлежащей данной прямой a.

Пусть $(x_0;\ y_0)$ — произвольное решение уравнения (*). Тогда $\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}$. Это равенство означает, что точка $N\ (x_0;\ y_0)$ равноудалена от точек $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$, следовательно, точка N принадлежит серединному перпендикуляру отрезка AB, то есть прямой a.

Итак, мы доказали, что уравнение (*) является уравнением данной прямой a.

Однако из курса алгебры 7 класса вы знаете, что уравнение прямой выглядит гораздо проще, а именно: $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно. Покажем, что уравнение (*) можно преобразовать к такому виду.

Возведем обе части уравнения (*) в квадрат. Имеем:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Получим:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Обозначив $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$, получим уравнение $ax + by = c$.

Поскольку точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ различны, то хотя бы одна из разностей $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ не равна нулю. Следовательно, числа a и b не равны нулю одновременно.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 10.1. ***Уравнение прямой имеет вид***

$$\boxed{ax + by = c,}$$

где a, b и c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно.

Верно и такое утверждение: *любое уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно, является уравнением прямой.*

Если $a = b = c = 0$, то графиком уравнения $ax + by = c$ является вся плоскость xy. Если $a = b = 0$ и $c \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

Из курса алгебры 7 класса вы знаете, что уравнение вида $ax + by = c$ называют линейным уравнением с двумя переменными. Уравнение прямой является частным видом линейного уравнения. Схема, изображенная на рисунке 10.2, иллюстрирует сказанное.

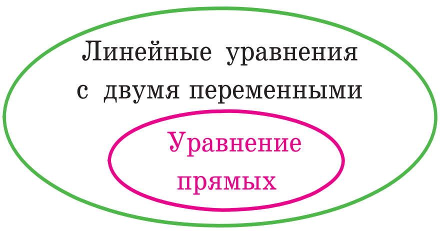


Рис. 10.2

Также на уроках алгебры в 7 классе мы приняли без доказательства тот факт, что графиком линейной функции $y = kx + p$ является прямая. Сейчас мы можем это доказать.

Перепишем уравнение $y = kx + p$ так: $-kx + y = p$. Ми получили уравнение вида $ax + by = c$ для случая, когда $a = -k$, $b = 1$, $c = p$. Поскольку в этом уравнении $b \neq 0$, то мы получили уравнение прямой.

А любую ли прямую на плоскости можно задать уравнением вида $y = kx + p$? Ответ на этот вопрос отрицательный.

Дело в том, что прямая, перпендикулярная оси абсцисс, не может являться графиком функции, а следовательно, не может быть задана уравнением вида $y = kx + p$.

Вместе с тем, если в уравнении прямой $ax+by=c$ принять $b=0$, то его можно переписать так: $x=\frac{c}{a}$. Мы получили частный вид уравнения прямой, все точки которой имеют одинаковые абсциссы. Следовательно, эта прямая перпендикулярна оси абсцисс. Ее называют вертикальной.

Если $b \neq 0$, то уравнение прямой $ax+by=c$ можно записать так: $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$. Обозначив $-\frac{a}{b}=k$, $\frac{c}{a}=p$, получим уравнение $y=kx+p$.

Следовательно, ***если*** $\boldsymbol{b=0}$ ***и*** $\boldsymbol{a \neq 0}$, ***то уравнение прямой*** $\boldsymbol{ax+by=c}$ ***задает вертикальную прямую; если*** $\boldsymbol{b \neq 0}$, ***то это уравнение задает невертикальную прямую.***

Уравнение невертикальной прямой удобно записывать в виде $y=kx+p$.

Данная таблица подытоживает материал, рассмотренный в этом пункте.

Уравнение	Значения a, b и c	График
$ax+by=c$	$b \neq 0$, a и c — любые	Невертикальная прямая
	$b=0$, $a \neq 0$, c — любое	Вертикальная прямая
	$a=b=c=0$	Вся координатная плоскость
	$a=b=0$, $c \neq 0$	—

Задача 1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:

1) $A\ (-3;\ 5)$ и $B\ (-3;\ -6)$; 2) $C\ (6;\ 1)$ и $D\ (-18;\ -7)$.

Решение. 1) Поскольку данные точки имеют равные абсциссы, то прямая AB является вертикальной. Ее уравнение имеет вид $x=-3$.

2) Поскольку данные точки имеют разные абсциссы, то прямая CD не является вертикальной. Тогда можно воспользоваться уравнением прямой в виде $y=kx+p$.

Подставив координаты точек C и D в уравнение $y=kx+p$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6k+p=1, \\ -18k+p=-7. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, находим, что $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$.

Ответ: 1) $x = -3$; 2) $y = \frac{1}{3}x - 1$. ◀

Задача 2. Найдите периметр и площадь треугольника, ограниченного прямой $5x + 12y = -60$ и осями координат.

Решение. Найдем точки пересечения данной прямой с осями координат.

С осью абсцисс: при $y = 0$ получаем $5x = -60$; $x = -12$.

С осью ординат: при $x = 0$ получаем $12y = -60$; $y = -5$.

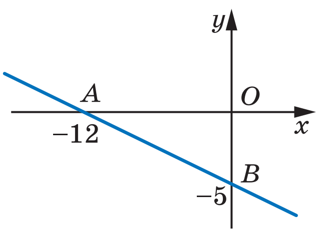


Рис. 10.3

Следовательно, данная прямая и оси координат ограничивают прямоугольный треугольник AOB (рис. 10.3) с вершинами $A(-12; 0)$, $B(0; -5)$ и $O(0; 0)$. Найдем стороны треугольника: $OA = 12$, $OB = 5$, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13$. Тогда искомые периметр и площадь соответственно равны $P = OA + OB + AB = 30$, $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 30$.

Ответ: $P = 30$, $S = 30$. ◀

1. Какой вид имеет уравнение прямой на плоскости xy?
2. Как принято называть прямую, все точки которой имеют одинаковые абсциссы? Как расположена эта прямая относительно оси абсцисс?
3. Любое ли линейное уравнение с двумя переменными является уравнением прямой?
4. В каком виде удобно записывать уравнение невертикальной прямой?
5. Любую ли прямую на плоскости можно задать уравнением вида $y = kx + p$?
6. При каком условии уравнение прямой $ax + by = c$ является уравнением вертикальной прямой? невертикальной прямой?

УПРАЖНЕНИЯ

10.1.° Какие из данных уравнений являются уравнениями прямых:

1) $2x - 3y = 5$;	4) $2x = 5$;	7) $0x + 0y = 0$;
2) $2x - 3y = 0$;	5) $-3y = 5$;	8) $0x + 0y = 5$?
3) $2x^2 - 3y = 5$;	6) $2x + 0y = 0$;	

10.2.° Найдите координаты точек пересечения прямой $4x-5y=20$ с осями координат. Принадлежит ли этой прямой точка:
1) A (10; 4); 2) B (6; 1); 3) C (−1,5; 5,2); 4) D (−1; 5)?

10.3.° Найдите координаты точек пересечения прямой $3x+4y=12$ с осями координат. Какая из точек M (−2; 4) и K (8; −3) принадлежит этой прямой?

10.4.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A (6; −3) и перпендикулярной оси x. Какие координаты имеет точка пересечения этой прямой с осью x?

10.5.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точку B (5; −8) и перпендикулярной оси y. Какие координаты имеет точка пересечения этой прямой с осью y?

10.6.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точку C (−4; 9) параллельно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.

10.7.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:
1) A (1; −3) и B (−2; −9);
2) C (3; 5) и D (3; −10);
3) E (−4; −1) и F (9; −1);
4) M (3; −3) и K (−6; 12).

10.8.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:
1) A (2; −5) и B (−3; 10);
2) C (6; −1) и D (24; 2).

10.9.° Найдите координаты точки пересечения прямых:
1) $y=3x-7$ и $y=5x+9$;
2) $2x-7y=-16$ и $6x+11y=16$.

10.10.° Найдите координаты точки пересечения прямых:
1) $y=-4x+1$ и $y=2x-11$;
2) $3x+2y=10$ и $x-8y=12$.

10.11.• Точки A (−6; −1), B (1; 2) и C (−5; −8) — вершины треугольника ABC. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану AK треугольника.

10.12.• Точки A (−3; −4), B (−2; 2), C (1; 3) и D (3; −2) — вершины трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Составьте уравнение прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

10.13.• Абсциссы середин боковых сторон трапеции равны. Можно ли утверждать, что основания трапеции перпендикулярны оси абсцисс?

10.14.• Найдите периметр треугольника, ограниченного осями координат и прямой $4x-3y=12$.

10.15.• Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой $7y-2x=28$.

10.16.• Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $3x+2y=6$ и $y=-\frac{9}{4}x$ и осью ординат.

10.17.• Докажите, что окружность $(x-5)^2+(y-5)^2=9$ и прямая $x+y=7$ пересекаются, и найдите координаты точек их пересечения.

10.18.• Докажите, что прямая $x+y=5$ является касательной к окружности $(x-3)^2+(y+2)^2=8$, и найдите координаты точки касания.

10.19.• Докажите, что окружность $(x-4)^2+(y-2)^2=1$ и прямая $3x+y=3$ не имеют общих точек.

10.20.•• Найдите расстояние от начала координат до прямой $5x-2y=10$.

10.21.•• Найдите расстояние от начала координат до прямой $x+y=-8$.

10.22.•• Найдите длину хорды окружности $(x+1)^2+(y-2)^2=25$, лежащей на прямой $y=3x$.

10.23.•• Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки A (1; −7) и B (−3; 5).

10.24.•• Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки C (2; 3) и D (−5; −2).

10.25.•• Найдите координаты точки, равноудаленной от осей координат и от точки A (3; 6).

10.26.•• Найдите координаты точки, равноудаленной от осей координат и от точки B (−4; 2).

10.27.* Составьте уравнение окружности, которая проходит через точки A (2; 0) и B (4; 0) и центр которой принадлежит прямой $2x+3y=18$.

10.28.* Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, радиус которых равен 5 и которые отсекают на оси абсцисс хорду длиной 6.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

10.29. Диагонали параллелограмма равны $6\sqrt{2}$ см и 8 см, а угол между ними составляет 45°. Найдите стороны параллелограмма.

10.30. Одна из сторон треугольника на 15 см больше другой, а высота, проведенная к третьей стороне, делит ее на отрезки длиной 32 см и 7 см. Найдите периметр треугольника.

10.31. Центр окружности, описанной около равнобокой трапеции, лежит на ее большем основании. Найдите радиус окружности, если диагональ трапеции равна 20 см, а высота — 12 см.

11. Угловой коэффициент прямой

Рассмотрим уравнение $y=kx$. Оно задает невертикальную прямую, проходящую через начало координат.

Покажем, что прямые $y=kx$ и $y=kx+b$, где $b \neq 0$, параллельны.

Точки O (0; 0) и C (1; k) принадлежат прямой $y=kx$, а точки A (0; b) и B (1; $k+b$) принадлежат прямой $y=kx+b$ (рис. 11.1). Легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что середины диагоналей AC и OB четырехугольника $OABC$ совпадают. Следовательно, четырехугольник $OABC$ — параллелограмм. Отсюда $AB \parallel OC$.

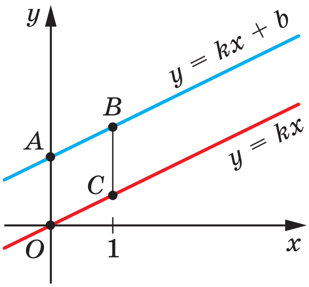


Рис. 11.1

Теперь мы можем сделать такой вывод:

***если $k_1=k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны* (1).**

Пусть прямая $y=kx$ пересекает единичную полуокружность в точке M (x_0; y_0) (рис. 11.2). Угол AOM называют **углом между данной прямой и положительным направлением оси абсцисс.**

Если прямая $y=kx$ совпадает с осью абсцисс, то угол между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс считают равным 0°.

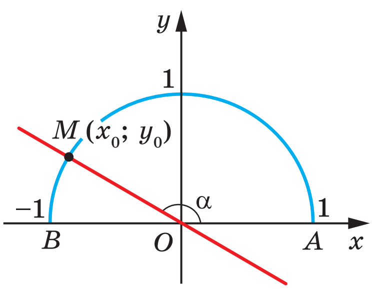


Рис. 11.2

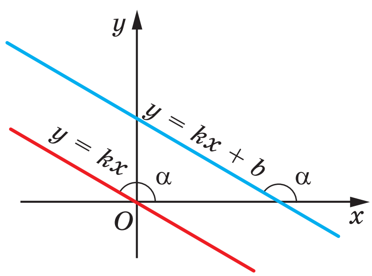


Рис. 11.3

Если прямая $y=kx$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, то считают, что и прямая $y=kx+b$, параллельная прямой $y=kx$, также образует угол α с положительным направлением оси абсцисс (рис. 11.3).

Рассмотрим прямую MO, уравнение которой имеет вид $y=kx$ (рис. 11.2). Если $\angle MOA=\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{y_0}{x_0}$. Поскольку точка M $(x_0;\ y_0)$ принадлежит прямой $y=kx$, то $\dfrac{y_0}{x_0}=k$. Отсюда $k=\operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, для прямой $y=kx+b$ получаем, что

$$\boxed{\boldsymbol{k}=\mathbf{tg}\ \alpha,}$$

где α — угол, который образует эта прямая с положительным направлением оси абсцисс. Поэтому коэффициент k называют **угловым коэффициентом** этой прямой.

Если невертикальные прямые параллельны, то они образуют равные углы с положительным направлением оси абсцисс. Тогда тангенсы этих углов равны, следовательно, равны и их угловые коэффициенты.

Таким образом,

если прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны, то $k_1=k_2$ **(2)**.

Выводы **(1)** и **(2)** объединим в одну теорему.

Теорема 11.1. ***Прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1=k_2$ и $b_1\neq b_2$.***

Задача. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку A $(-4;\ 3)$ и параллельна прямой $y=0{,}5x-4$.

Решение. Пусть уравнение искомой прямой $y=kx+p$. Поскольку эта прямая и прямая $y=0{,}5x-4$ параллельны, то их угловые коэффициенты равны, то есть $k=0{,}5$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид $y=0{,}5x+p$. Учитывая, что данная прямая проходит через точку A $(-4;\ 3)$, получаем: $0{,}5\cdot(-4)+p=3$. Отсюда $p=5$.

Искомое уравнение имеет вид $y=0{,}5x+5$.

Ответ: $y=0{,}5x+5$. ◄

?

1. Поясните, что называют углом между прямой и положительным направлением оси абсцисс.
2. Чему считают равным угол между прямой, параллельной оси абсцисс или совпадающей с ней, и положительным направлением оси абсцисс?
3. Что называют угловым коэффициентом прямой?

4. Как связаны угловой коэффициент прямой и угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс?

5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие параллельности двух невертикальных прямых на координатной плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

11.1.° Чему равен угловой коэффициент прямой:

1) $y=2x-7$; 3) $y=x+10$; 5) $y=4$;
2) $y=-3x$; 4) $y=5-x$; 6) $3x-2y=4$?

11.2.° Какие из прямых $y=6x-5$, $y=0{,}6x+1$, $y=\frac{3}{5}x+4$, $y=2-6x$ и $y=600+0{,}6x$ параллельны?

11.3.° Какое число надо поставить вместо звездочки, чтобы были параллельными прямые:

1) $y=8x-14$ и $y=*x+2$; 2) $y=*x-1$ и $y=3-4x$?

11.4.° Составьте уравнение прямой, которая проходит через начало координат и параллельна прямой:

1) $y=14x-11$; 2) $y=-1{,}15x+2$.

11.5.• Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A\ (-3;\ 7)$ и угловой коэффициент которой равен:

1) 4; 2) -3; 3) 0.

11.6.• Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $B\ (2;\ -5)$ и угловой коэффициент которой равен $-0{,}5$.

11.7.• Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $M\ (-1;\ 9)$ и параллельна прямой:

1) $y=-7x+3$; 2) $3x-4y=-8$.

11.8.• Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $K\left(-\frac{1}{3};10\right)$ и параллельна прямой:

1) $y=9x-16$; 2) $6x+2y=7$.

11.9.• Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A\ (2;\ 6)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол:

1) $60°$; 2) $120°$.

11.10.• Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $B\ (3;\ -2)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол:

1) $45°$; 2) $135°$.

11.11.$^{\bullet}$ Составьте уравнение прямой, изображенной на рисунке 11.4.

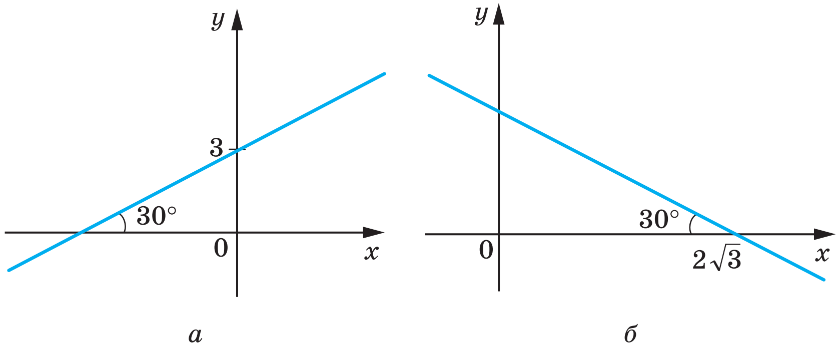


Рис. 11.4

11.12.$^{\bullet}$ Определите, параллельны ли прямые:

1) $2x-5y=9$ и $5y-2x=1$;
2) $8x+12y=15$ и $4x+6y=9$;
3) $7x-2y=12$ и $7x-3y=12$;
4) $3x+2y=3$ и $6x+4y=6$.

11.13.$^{\bullet}$ Докажите, что прямые $7x-6y=3$ и $6y-7x=6$ параллельны.

11.14.$^{\bullet\bullet}$ Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y=4x+2$ и пересекает прямую $y=-8x+9$ в точке, принадлежащей оси ординат.

11.15.$^{\bullet\bullet}$ Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y=3x+4$ и пересекает прямую $y=-4x+16$ в точке, принадлежащей оси абсцисс.

11.16.* Составьте уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y=-x+3$ и проходит через точку A (1; 5).

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

11.17. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O (рис. 11.5). Докажите, что угол AOB равен полусумме углов C и D.

11.18. Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба на отрезки 7 см и 18 см, считая от вершины острого угла. Найдите диагонали ромба.

11.19. Медианы равнобедренного треугольника равны 15 см, 15 см и 18 см. Найдите площадь треугольника.

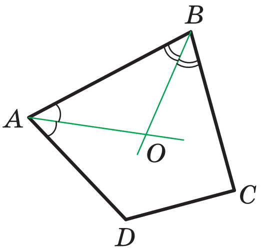


Рис. 11.5

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

11.20. Какое наименьшее значение может принимать радиус круга, из которого можно вырезать треугольник со сторонами 2 см, 3 см, 4 см?

МЕТОД КООРДИНАТ

Мы часто говорим: прямая $y=2x-1$, парабола $y=x^2$, окружность $x^2+y^2=1$, тем самым отождествляя фигуру с ее уравнением. Такой подход позволяет сводить задачу о поиске свойств фигуры к задаче об исследовании ее уравнения. В этом и состоит суть метода координат.

Проиллюстрируем сказанное на таком примере.

Из наглядных соображений очевидно, что прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Однако это утверждение не является аксиомой, поэтому его надо доказывать.

Эта задача сводится к исследованию количества решений системы уравнений

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ (x-m)^2+(y-n)^2=R^2, \end{cases}$$

где числа a и b одновременно не равны нулю и $R>0$.

Решая эту систему методом подстановки, мы получим квадратное уравнение, которое может иметь два решения, одно решение или вообще не иметь решений. Следовательно, для данной системы существует три возможных случая:

1) система имеет два решения — прямая и окружность пересекаются в двух точках;
2) система имеет одно решение — прямая касается окружности;
3) система не имеет решений — прямая и окружность не имеют общих точек.

С каждым из этих случаев вы встречались, решая задачи 10.17–10.19.

Метод координат особенно эффективен в тех случаях, когда требуется найти фигуру, все точки которой обладают некоторым свойством, то есть найти геометрическое место точек.

Отметим на плоскости две точки A и B. Вы хорошо знаете, какой фигурой является геометрическое место точек M таких, что

$\frac{MA}{MB}=1$. Это серединный перпендикуляр отрезка AB. Интересно выяснить, какую фигуру образуют все точки M, для которых $\frac{MA}{MB}=k$, где $k \neq 1$. Решим эту задачу для $k=\frac{1}{2}$.

Плоскость, на которой отмечены точки A и B, «превратим» в координатную. Сделаем это так: в качестве начала координат выберем точку A, в качестве единичного отрезка — отрезок AB, ось абсцисс проведем так, чтобы точка B имела координаты (1; 0) (рис. 11.6).

Пусть $M\ (x;\ y)$ — произвольная точка искомой фигуры F. Тогда $2MA=MB$; $4MA^2=MB^2$. Отсюда

$$4\ (x^2+y^2)=(x-1)^2+y^2;\quad 3x^2+2x+3y^2=1;$$

$$x^2+\frac{2}{3}x+y^2=\frac{1}{3};\quad x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}+y^2=\frac{4}{9};$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}. \qquad (*)$$

Следовательно, если точка $M(x;\ y)$ принадлежит фигуре F, то ее координаты являются решением уравнения (*).

Пусть $(x_1;\ y_1)$ — некоторое решение уравнения (*). Тогда легко показать, что $4\left(x_1^2+y_1^2\right)=(x_1-1)^2+y_1^2$. А это означает, что точка $N(x_1;\ y_1)$ такова, что $4NA^2=NB^2$. Тогда $2NA=NB$. Следовательно, точка N принадлежит фигуре F.

Таким образом, уравнением фигуры F является уравнение (*), то есть фигура F — это окружность с центром в точке $O\left(-\frac{1}{3};0\right)$ и радиусом $\frac{2}{3}$.

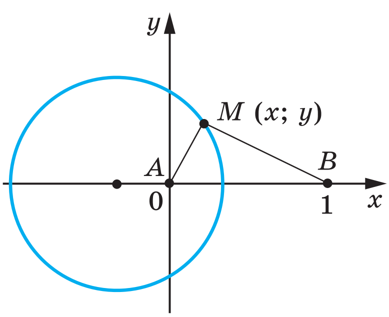


Рис. 11.6

Мы решили задачу для частного случая, когда $k=\frac{1}{2}$. Можно показать, что искомой фигурой для любого положительного $k \neq 1$ будет окружность. Эту окружность называют **окружностью Аполлония**[1].

[1] Аполлоний Пергский (III–II вв. до н. э.) — древнегреческий математик и астроном.

КАК СТРОИЛИ МОСТ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЕЙ И АЛГЕБРОЙ

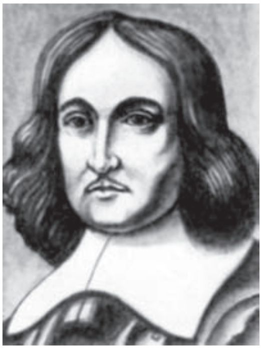
Идея координат зародилась очень давно. Ведь еще в старину люди изучали Землю, наблюдали звезды, а по результатам своих исследований составляли карты, схемы.

Во II в. до н. э. древнегреческий ученый Гиппарх впервые использовал идею координат для определения места расположения объектов на поверхности Земли.

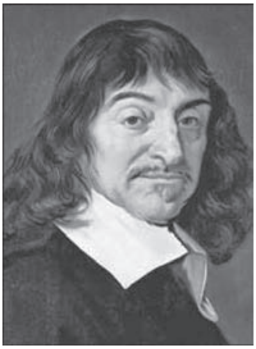
Только в XIV в. французский ученый Николя Орем (ок. 1323–1382) впервые применил в математике идею Гиппарха: он разбил плоскость на клетки (как разбита страница вашей тетради) и стал задавать положение точек широтой и долготой.

Однако огромные возможности применения этой идеи были раскрыты лишь в XVII в. в работах выдающихся французских математиков Пьера Ферма и Рене Декарта. В своих трудах эти ученые показали, как благодаря системе координат можно переходить от точек к числам, от линий к уравнениям, от геометрии к алгебре.

Несмотря на то что П. Ферма опубликовал свою роботу на год раньше Р. Декарта, систему координат, которой мы сегодня пользуемся, называют **декартовой**. Р. Декарт в своей работе «Рассуждение о методе» предложил новую удобную буквенную символику, которой с незначительными изменениями мы пользуемся и сегодня. Вслед за Декартом мы обозначаем переменные последними буквами латинского алфавита x, y, z, а коэффициенты — первыми: a, b, c, ... Привычные нам обозначения степеней x^2, y^3, z^5 и т. д. также ввел Р. Декарт.



Пьер Ферма
(1601–1665)



Рене Декарт
(1596–1650)

ЗАДАНИЕ № 3 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Какие координаты имеет середина отрезка AB, если A (−6; 7), B (4; −9)?

А) (−5; 8); В) (−5; −1);
Б) (−1; −1); Г) (−1; 8).

2. Чему равно расстояние между точками C (8; −11) и D (2; −3)?

А) 100; В) $\sqrt{296}$;
Б) 10; Г) $\sqrt{164}$.

3. Какие координаты имеет центр окружности $(x-5)^2+(y+9)^2=16$?

А) (5; −9); В) (5; 9);
Б) (−5; 9); Г) (−5; −9).

4. Центром которой из данных окружностей является начало координат?

А) $x^2+(y-1)^2=1$; В) $x^2+y^2=1$;
Б) $(x-1)^2+y^2=1$; Г) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

5. Найдите радиус окружности, диаметром которой является отрезок MK, если M (14; 12) и K (−10; 2).

А) 26; В) 25;
Б) 13; Г) 5.

6. Каковы координаты точки пересечения прямой $5x-3y=15$ с осью абсцисс?

А) (0; −5); В) (0; 3);
Б) (−5; 0); Г) (3; 0).

7. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Заданы три его вершины: B (−2; 3), C (10; 9), D (7; 0). Найдите координаты вершины A.

А) (1; 6); В) (−5; −6);
Б) (19; −3); Г) (6; 5).

8. Какие координаты имеет точка оси ординат, равноудаленная от точек A (−3; 4) и B (1; 8)?

А) (−5; 0); В) (5; 0);
Б) (0; −5); Г) (0; 5).

9. Найдите абсциссу точки прямой AB, ордината которой равна 2, если A (−7; 4), B (9; 12).

А) 8,5; В) 4;
Б) −11; Г) −2.

10. Чему равно расстояние между точкой пересечения прямых $x-y=4$ и $x+3y=12$ и точкой M (1; 7)?

А) 5; В) $5\sqrt{2}$;

Б) 50; Г) $2\sqrt{5}$.

11. Каково уравнение прямой, проходящей через точку P (−1; 6) параллельно прямой $y=2x-5$?

А) $y=6-5x$; В) $y=5x-6$;

Б) $y=2x+8$; Г) $y=2x-8$.

12. Чему равен радиус окружности $x^2+y^2+14y-12x+78=0$?

А) $\sqrt{7}$; В) 14;

Б) 7; Г) $\sqrt{14}$.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 3

Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$ можно найти по формуле $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Координаты середины отрезка

Координаты $(x_0;\ y_0)$ середины отрезка с концами $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ можно найти по формулам:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Уравнение фигуры

Уравнением фигуры F, заданной на плоскости xy, называют уравнение с двумя переменными x и y, обладающее следующими свойствами:

1) если точка принадлежит фигуре F, то ее координаты являются решением данного уравнения;
2) любое решение $(x;\ y)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре F.

Уравнение окружности

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке A $(a;\ b)$ имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
Любое уравнение вида $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, где a, b и R — некоторые числа, причем $R>0$, является уравнением окружности радиуса R с центром в точке с координатами $(a;\ b)$.

Уравнение прямой

Уравнение прямой имеет вид $ax+by=c$, где a, b и c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно.
Любое уравнение вида $ax+by=c$, где a, b и c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно, является уравнением прямой.
Если $b=0$ и $a \neq 0$, то уравнение прямой $ax+by=c$ задает вертикальную прямую; если $b \neq 0$, то это уравнение задает невертикальную прямую.

Угловой коэффициент прямой

Коэффициент k в уравнении прямой $y=kx+b$ называют угловым коэффициентом прямой, и он равен тангенсу угла, который образует эта прямая с положительным направлением оси абсцисс.

Необходимое и достаточное условие параллельности невертикальных прямых

Прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1=k_2$ и $b_1 \neq b_2$.

ВЕКТОРЫ §4

Изучая материал этого параграфа, вы узнаете, что векторы используются не только в физике, но и в геометрии.

Вы научитесь складывать и вычитать векторы, умножать вектор на число, находить угол между двумя векторами, применять свойства векторов для решения задач.

12. Понятие вектора

Вы знаете много величин, которые определяются своими числовыми значениями: масса, площадь, длина, объем, время, температура и т. д. Такие величины называют **скалярными величинами** или **скалярами.**

Из курса физики вам знакомы величины, для задания которых недостаточно знать только их числовое значение. Например, если на пружину действует сила 5 Н, то непонятно, будет ли пружина сжиматься или растягиваться (рис. 12.1). Надо еще знать, в каком направлении действует сила.

Рис. 12.1

Величины, которые определяются не только числовым значением, но и направлением, называют **векторными величинами** или **векторами**[1].

[1] Термин «вектор» впервые появился в 1845 г., его ввел в употребление ирландский математик и астроном У. Гамильтон.

Сила, перемещение, скорость, ускорение, вес — примеры векторных величин.

Есть векторы и в геометрии.

Рассмотрим отрезок AB. Если мы договоримся точку A считать **началом** отрезка, а точку B — его **концом**, то такой отрезок будет характеризоваться не только длиной, но и направлением от точки A к точке B.

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка — его концом, то такой отрезок называют **направленным отрезком** или **вектором**.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (читают: «вектор AB»).

На рисунках вектор изображают отрезком со стрелкой, указывающей его конец. На рисунке 12.2 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$.

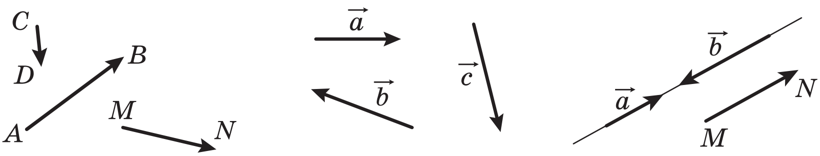


Рис. 12.2 **Рис. 12.3** **Рис. 12.4**

Для обозначения векторов также используют строчные буквы латинского алфавита со стрелкой сверху. На рисунке 12.3 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Вектор, у которого начало и конец — одна и та же точка, называют **нулевым вектором** или **нуль-вектором** и обозначают $\vec{0}$. Если начало и конец нулевого вектора — это точка A, то его можно обозначить и так: $\overrightarrow{AA}$. На рисунке нулевой вектор изображают точкой.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка AB. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$, а модуль вектора $\vec{a}$ — так: $|\vec{a}|$.

Модуль нулевого вектора считают равным нулю: $|\vec{0}|=0$.

Определение. **Ненулевые векторы называют *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.**

Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

На рисунке 12.4 изображены коллинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{MN}$.

Тот факт, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, обозначают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

На рисунке 12.5 ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены. Такие векторы называют **сонаправленными** и пишут: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

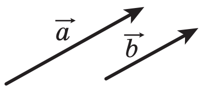


Рис. 12.5

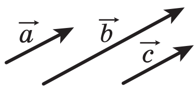


Рис. 12.6

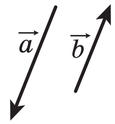


Рис. 12.7

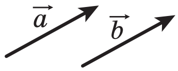


Рис. 12.8

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ***и*** $\vec{b} \parallel \vec{c}$, ***то*** $\vec{a} \parallel \vec{c}$.

Аналогичным свойством обладают и сонаправленные векторы, то есть ***если*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ***и*** $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, ***то*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (рис. 12.6).

На рисунке 12.7 ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **противоположно направлены**. Этот факт обозначают так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение. Ненулевые векторы называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

На рисунке 12.8 изображены равные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это обозначают так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Равенство ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ означает, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Нетрудно доказать, что если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$. Убедитесь в этом самостоятельно.

Часто, говоря о векторах, мы не конкретизируем, какая точка является началом вектора. Так, на рисунке 12.9 изображены вектор $\vec{a}$ и векторы, равные вектору $\vec{a}$. Каждый из них также принято называть вектором $\vec{a}$.

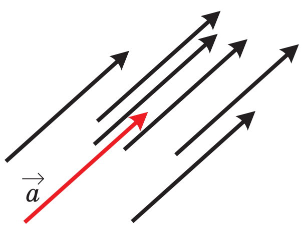


Рис. 12.9

На рисунке 12.10, *а* изображены вектор $\vec{a}$ и точка A. Если построен вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен от точки** A (рис. 12.10, *б*).

Покажем, как от произвольной точки M отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$.

Если вектор $\vec{a}$ нулевой, то искомым вектором будет вектор $\overrightarrow{MM}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$. Пусть точка M лежит на прямой, содержащей вектор $\vec{a}$ (рис. 12.11). На этой прямой существуют две точки E и F такие, что $ME = MF = |\vec{a}|$. На указанном рисунке вектор $\overrightarrow{MF}$ будет равным вектору $\vec{a}$. Его и следует выбрать.

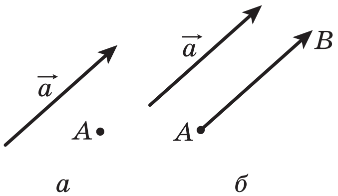


Рис. 12.10

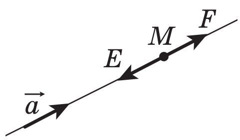


Рис. 12.11

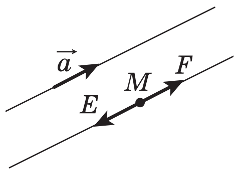


Рис. 12.12

Если точка M не принадлежит прямой, содержащей вектор $\vec{a}$, то через точку M проведем прямую, ей параллельную (рис. 12.12). Дальнейшее построение аналогично уже рассмотренному.

От заданной точки можно отложить только один вектор, равный данному.

Задача. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

Решение. Из условия $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ следует, что $AB \parallel DC$ и $AB = DC$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Равенство $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ означает, что диагонали четырехугольника $ABCD$ равны. А параллелограмм с равными диагоналями — прямоугольник. ◄

?

1. Приведите примеры скалярных величин.
2. Какие величины называют векторными?
3. Что в геометрии называют векторами?

4. Какие из величин являются векторными: время, вес, ускорение, импульс, масса, перемещение, путь, площадь, давление?
5. Какой отрезок называют направленным отрезком или вектором?
6. Как обозначают вектор с началом в точке A и концом в точке B?
7. Какой вектор называют нулевым?
8. Что называют модулем вектора $\overrightarrow{AB}$?
9. Чему равен модуль нулевого вектора?
10. Какие векторы называют коллинеарными?
11. Как обозначают сонаправленные векторы? противоположно направленные векторы?
12. Какие векторы называют равными?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

12.1.° Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

12.2. Катер из точки A переместился на север на 40 км в точку B, а затем на запад на 60 км из точки B в точку C. Выбрав масштаб, начертите векторы, изображающие перемещение из точки A в точку B, из точки B в точку C, из точки A в точку C.

12.3.° Начертите треугольник ABC. Начертите вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{CA}$, началом которого является точка B.

12.4.° Даны вектор $\vec{a}$ и точка A (рис. 12.13). Отложите от точки A вектор, равный вектору $\vec{a}$.

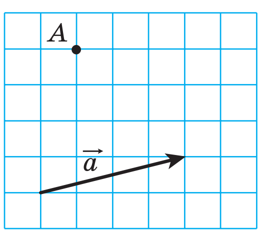


Рис. 12.13

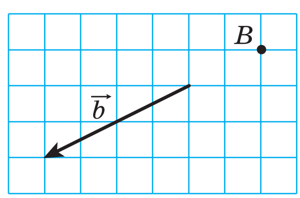


Рис. 12.14

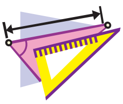
12.5.° Даны вектор $\vec{b}$ и точка B (рис. 12.14). Отложите от точки B вектор, равный вектору $\vec{b}$.

12.6.° Отметьте точки A и B. Начертите вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$.

12.7.° Начертите вектор $\vec{a}$ и отметьте точки M и N. Отложите от этих точек векторы, равные вектору $\vec{a}$.

12.8.• Начертите треугольник ABC и отметьте точку M — середину стороны BC. От точки M отложите вектор, равный вектору $\overrightarrow{AM}$, а от точки B — вектор, равный вектору $\overrightarrow{AC}$. Докажите, что концы построенных векторов совпадают.

12.9.• Начертите треугольник ABC. От точек B и C отложите векторы, соответственно равные векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$. Докажите, что концы построенных векторов совпадают.



УПРАЖНЕНИЯ

12.10.° Укажите равные векторы, начала и концы которых находятся в вершинах квадрата $ABCD$.

12.11.° В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Укажите равные векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D и O.

12.12.° Какие из векторов, изображенных на рисунке 12.15:

1) равны;
2) сонаправлены;
3) противоположно направлены;
4) коллинеарны?

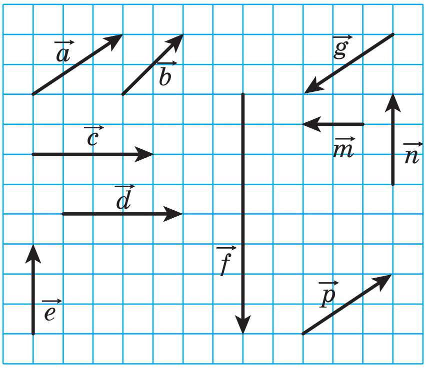


Рис. 12.15

12.13.° Точки M и N — соответственно середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D, M и N:

1) равные вектору $\overrightarrow{AM}$;

2) коллинеарные вектору $\overrightarrow{CD}$;

3) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{NC}$;

4) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{BC}$.

12.14.° Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D и O:

1) равные;

2) сонаправленные;

3) противоположно направленные.

12.15.° Точки M, N и P — соответственно середины сторон AB, BC и CA треугольника ABC. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, M, N и P:

1) равные вектору $\overrightarrow{MN}$;

2) коллинеарные вектору $\overrightarrow{AB}$;

3) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{MP}$;

4) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{CA}$.

12.16.° Верно ли утверждение:

1) если $\vec{m} = \vec{n}$, то $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;

2) если $\vec{m} = \vec{n}$, то $\vec{m} \parallel \vec{n}$;

3) если $\vec{m} \neq \vec{n}$, то $|\vec{m}| \neq |\vec{n}|$?

12.17.° Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

12.18.° Определите вид четырехугольника $ABCD$, если $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$.

12.19.° Определите вид четырехугольника $ABCD$, если векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны и $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AD}|$.

12.20.° Найдите модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 12.16), если сторона клетки равна 0,5 см.

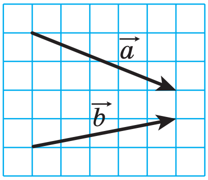


Рис. 12.16

12.21.° В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите модули векторов $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OC}$.

12.22.° В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $|\overrightarrow{AB}| = 5$ см, $|\overrightarrow{AO}| = 6{,}5$ см. Найдите модули векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

12.23.° Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Можно ли утверждать, что точки A, B, C и D являются вершинами параллелограмма?

12.24.° Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Какие еще равные векторы заданы точками A, B, C и D?

12.25.° Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

12.26.° Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

12.27.° Что можно сказать о векторе $\overrightarrow{AB}$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?

12.28.• В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AB и $\angle B = 30°$. Найдите модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MC}$, если $AC = 2$ см.

12.29.• В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медиана CM равна 6 см. Найдите модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $\angle A = 30°$.

12.30.• Известно, что векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны. Вектор $\vec{a}$ коллинеарен каждому из векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что вектор $\vec{a}$ является нулевым.

12.31.• Известно, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой. Верно ли обратное утверждение: если точки A, B и C лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны?

12.32.• Для четырех точек A, B, C и D известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Докажите, что середины отрезков AD и BC совпадают. Докажите обратное утверждение: если середины отрезков AD и BC совпадают, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

12.33.• Известно, что $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$. Докажите, что точка O — середина отрезка MN. Докажите обратное утверждение: если точка O — середина отрезка MN, то $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

12.34. Один из углов параллелограмма равен полусумме трех остальных его углов. Найдите углы параллелограмма.

12.35. Периметр одного из двух подобных треугольников на 8 см больше периметра другого треугольника. Найдите периметры данных треугольников, если коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$.

12.36. На сторонах BC и AD ромба $ABCD$ отметили соответственно точки M и K такие, что $BM : MC = KD : AK = 1 : 2$. Найдите отрезок MK, если $AB = a$, $\angle ABC = 60°$.

13. Координаты вектора

Рассмотрим на координатной плоскости вектор $\vec{a}$. Отложим от начала координат равный ему вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 13.1). **Координатами вектора** $\vec{a}$ называют координаты точки A. Запись $\vec{a}(x; y)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x; y)$.

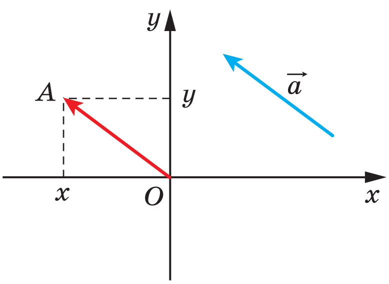


Рис. 13.1

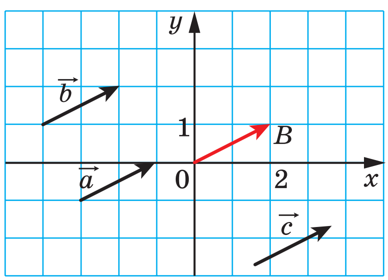


Рис. 13.2

Числа x и y называют соответственно **первой** и **второй координатами вектора** $\vec{a}$.

Из определения следует, что ***равные векторы имеют равные соответствующие координаты***. Например, каждый из равных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 13.2) имеет координаты (2; 1).

Справедливо и обратное утверждение: ***если соответствующие координаты векторов равны, то равны и сами векторы***.

Действительно, если отложить такие векторы от начала координат, то их концы совпадут.

Очевидно, что нулевой вектор имеет координаты (0; 0).

Теорема 13.1. ***Если точки*** $A\ (x_1;\ y_1)$ ***и*** $B\ (x_2;\ y_2)$ ***соответственно являются началом и концом вектора*** $\vec{a}$, ***то числа*** $x_2 - x_1$ ***и*** $y_2 - y_1$ ***равны соответственно первой и второй координатам вектора*** $\vec{a}$.

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$, имеет координаты $(a_1;\ a_2)$. Докажем, что $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то утверждение теоремы очевидно.

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OM}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$. Тогда координаты точки M равны $(a_1;\ a_2)$.

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то, воспользовавшись результатом задачи 12.32, можем сделать вывод, что середины отрезков OB и AM совпадают. Координаты середин отрезков OB и AM соответственно равны $\left(\frac{0 + x_2}{2};\ \frac{0 + y_2}{2}\right)$ и $\left(\frac{x_1 + a_1}{2};\ \frac{y_1 + a_2}{2}\right)$. Тогда

$$\frac{0 + x_2}{2} = \frac{x_1 + a_1}{2},\quad \frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_1 + a_2}{2}.$$

Эти равенства выполняются и тогда, когда точка O совпадает с точкой B или точка A совпадает с точкой M.

Отсюда $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ◄

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2)$, то

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Задача. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A\ (3;\ -2)$, $B\ (-4;\ 1)$, $C\ (-2;\ -3)$. Найдите координаты вершины D.

Решение. Поскольку четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Следовательно, координаты этих векторов равны.

Пусть координаты точки D равны $(x;\ y)$. Для нахождения координат векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ воспользуемся теоремой 13.1.

Имеем:

$$\overrightarrow{AB}\,(-4 - 3; 1 - (-2)) = \overrightarrow{AB}\,(-7; 3);\quad \overrightarrow{DC}\,(-2 - x; -3 - y).$$

Отсюда

$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Ответ: D (5; –6). ◀

1. Поясните, что называют координатами данного вектора.
2. Что можно сказать о координатах равных векторов?
3. Что можно сказать о векторах, соответствующие координаты которых равны?
4. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
5. Как найти модуль вектора, если известны его координаты?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

13.1.° С помощью циркуля и линейки постройте точку, координаты которой равны координатам данного вектора $\vec{a}$ (рис. 13.3).

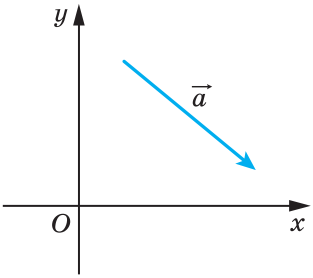


Рис. 13.3

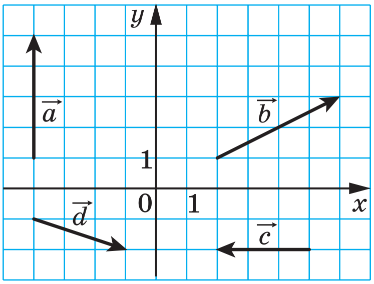


Рис. 13.4

13.2.° Отложите от начала координат векторы $\vec{a}$ (–3; 2), $\vec{b}$ (0; –2) и $\vec{c}$ (4; 0).

13.3.° Отложите от точки M(–1; 2) векторы $\vec{a}$ (1; –3), $\vec{b}$ (–2; 0) и $\vec{c}$ (0; –1).

УПРАЖНЕНИЯ

13.4.° Найдите координаты векторов, изображенных на рисунке 13.4.

13.5.° Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
1) $A\ (2;\ 3)$, $B\ (-1;\ 4)$;
2) $A\ (3;\ 0)$, $B\ (0;\ -3)$;
3) $A\ (0;\ 0)$, $B\ (-2;\ -8)$;
4) $A\ (m;\ n)$, $B\ (p,\ k)$.

13.6.° Даны точка $A\ (1;\ 3)$ и вектор $\vec{a}\ (-2;\ 1)$. Найдите координаты точки B такой, что $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

13.7.° Даны точки $A\ (3;\ -7)$, $B\ (4;\ -5)$ и $C\ (5;\ 8)$. Найдите координаты точки D такой, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

13.8.° От точки $A\ (4;\ -3)$ отложен вектор $\vec{m}\ (-1;\ 8)$. Найдите координаты конца вектора.

13.9.° Даны точки $A\ (3;\ -4)$, $B\ (-2;\ 7)$, $C\ (-4;\ 16)$ и $D\ (1;\ 5)$. Докажите, что $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

13.10.° Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (1;\ -5)$, $B\ (2;\ 3)$, $C\ (-3;\ 1)$ и $D\ (-4;\ -7)$ является параллелограммом.

13.11.° Среди векторов $\vec{a}\ (3;\ -4)$, $\vec{b}\ (-4;\ 2)$, $\vec{c}\left(3;\ \sqrt{11}\right)$, $\vec{d}\ (-2;\ -4)$, $\vec{e}\left(-1;\ -2\sqrt{6}\right)$ и $\vec{f}\ (-4;\ 5)$ найдите те, которые имеют равные модули.

13.12.° Даны точки $A\ (1;\ -4)$, $B\ (-2;\ 5)$, $C\ (1+a;\ -4+b)$ и $D\ (-2+a;\ 5+b)$. Докажите, что $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

13.13.° Найдите все значения x, при которых модуль вектора $\vec{a}\ (x;\ -8)$ равен 10.

13.14.° При каких значениях y модуль вектора $\vec{b}\ (12;\ y)$ равен 13?

13.15.• Отрезок BM — медиана треугольника ABC с вершинами $A\ (3;\ -5)$, $B\ (2;\ -3)$ и $C\ (-1;\ 7)$. Найдите координаты и модуль вектора $\overrightarrow{BM}$.

13.16.• Точка F делит сторону BC прямоугольника $ABCD$ в отношении $1 : 2$, считая от вершины B (рис. 13.5). Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{FD}$.

13.17.• Точка E — середина стороны AC прямоугольника $OACD$ (рис. 13.6). Найдите координаты векторов $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{EO}$.

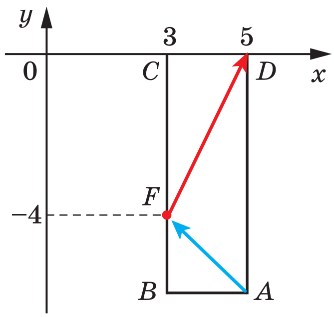


Рис. 13.5

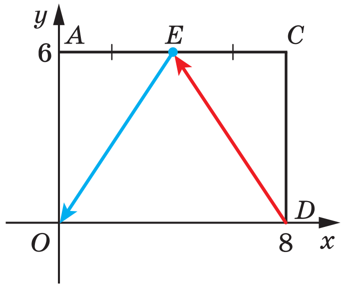


Рис. 13.6

13.18.• Модуль вектора $\vec{a}$ равен 10. Его первая координата на 2 больше второй. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.

13.19.• Модуль вектора $\vec{c}$ равен 2, а его координаты равны. Найдите координаты вектора $\vec{c}$.

13.20.•• Точки A (2; 5) и B (7; 5) — вершины прямоугольника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен 13. Найдите координаты точек C и D.

13.21.•• Точки A (1; 2) и D (1; −6) — вершины прямоугольника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ равен 17. Найдите координаты вершин B и C.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

13.22. Два равных равнобедренных треугольника ADB и CBD ($AB=BD=CD$) имеют общую боковую сторону (рис. 13.7). Определите вид четырехугольника $ABCD$.

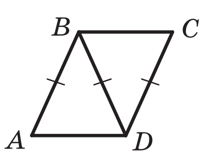


Рис. 13.7

13.23. Периметр треугольника равен 48 см, а его биссектриса делит сторону треугольника на отрезки длиной 5 см и 15 см. Найдите стороны треугольника.

13.24. Боковая сторона равнобокой трапеции, описанной около окружности, равна a, а один из углов — 60°. Найдите площадь трапеции.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

13.25. Можно ли из квадрата со стороной 10 см вырезать несколько кругов, сумма диаметров которых больше 5 м?

14. Сложение и вычитание векторов

Если тело переместилось из точки A в точку B, а затем из точки B в точку C, то суммарное перемещение из точки A в точку C естественно представить в виде вектора $\overrightarrow{AC}$, считая этот вектор суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, то есть $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 14.1).

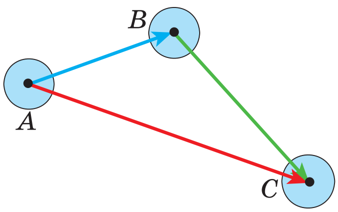


Рис. 14.1

Этот пример подсказывает, как ввести понятие суммы векторов, то есть как сложить два данных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. Далее от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называют **суммой векторов** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ (рис. 14.2) *и записывают*: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Описанный алгоритм сложения двух векторов называют **правилом треугольника.**

Это название связано с тем, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то точки A, B и C являются вершинами треугольника (рис. 14.2).

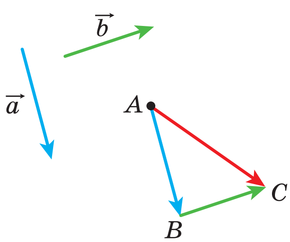
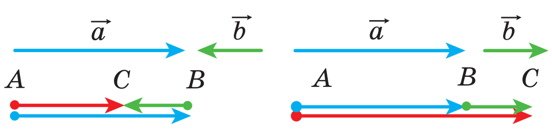


Рис. 14.2



а *б*

Рис. 14.3

По правилу треугольника можно складывать и коллинеарные векторы. На рисунке 14.3 вектор $\overrightarrow{AC}$ равен сумме коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Следовательно, ***для любых трех точек A, B и C выполняется равенство*** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, которое выражает правило треугольника для сложения векторов.

Теорема 14.1. ***Если координаты векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ ***соответственно равны*** $(a_1; a_2)$ ***и*** $(b_1; b_2)$***, то координаты вектора*** $\vec{a}+\vec{b}$ ***равны*** $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Доказательство. Пусть точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$ таковы, что $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Имеем: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Докажем, что координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ равны $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Найдем координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\vec{a}(x_2-x_1; y_2-y_1)$, $\vec{b}(x_3-x_2; y_3-y_2)$, $\overrightarrow{AC}(x_3-x_1; y_3-y_1)$.

Имеем:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}(x_3-x_1; y_3-y_1)=\overrightarrow{AC}(x_3-x_2+x_2-x_1; y_3-y_2+y_2-y_1).$$

С учетом того, что $x_2-x_1=a_1$, $x_3-x_2=b_1$, $y_2-y_1=a_2$, $y_3-y_2=b_2$, получаем: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}(a_1+b_1; a_2+b_2)$. ◀

Замечание. Описывая правило треугольника для нахождения суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, мы отложили вектор $\vec{a}$ от произвольной точки. Если точку A заменить точкой A_1, то вместо вектора $\overrightarrow{AC}$, равного сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим некоторый вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. Из теоремы 14.1 следует, что координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ равны $(a_1+b_1; a_2+b_2)$, следовательно, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$. Это означает, что сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависит от того, от какой точки отложен вектор $\vec{a}$.

Свойства сложения векторов аналогичны свойствам сложения чисел.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ ***и*** $\vec{c}$ ***выполняются равенства***:

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — переместительное свойство;

3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — сочетательное свойство.

Для доказательства этих свойств достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правой и левой частях равенств. Сделайте это самостоятельно.

Сумму трех и более векторов находят так: сначала складывают первый и второй векторы, затем складывают полученный вектор с третьим и т. д. Например, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$.

Из переместительного и сочетательного свойств сложения векторов следует, что при сложении нескольких векторов можно менять местами слагаемые и расставлять скобки любым способом.

В физике часто приходится складывать векторы, отложенные от одной точки. Так, если к телу приложены силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ (рис. 14.4), то равнодействующая этих сил равна сумме $\vec{F_1}+\vec{F_2}$.

Для нахождения суммы двух неколлинеарных векторов, отложенных от одной точки, удобно пользоваться **правилом параллелограмма для сложения векторов**.

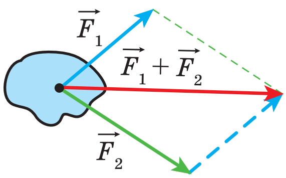


Рис. 14.4

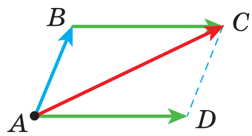


Рис. 14.5

Пусть надо найти сумму неколлинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис. 14.5). Отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\overrightarrow{AD}$. Тогда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Поскольку векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равны, то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм с диагональю AC.

Приведенные соображения позволяют сформулировать правило параллелограмма для сложения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Построим параллелограмм $ABCD$ (рис. 14.6). *Тогда искомая сумма $\vec{a}+\vec{b}$ равна вектору* $\overrightarrow{AC}$.

Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Пишут: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Покажем, как построить вектор, равный разности данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 14.7). Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$

равен разности $\vec{a} - \vec{b}$. Действительно, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$. Следовательно, по определению разности двух векторов $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, то есть $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$.

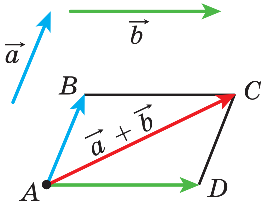


Рис. 14.6

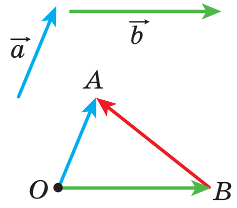


Рис. 14.7

На рисунке 14.7 векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ неколлинеарны. Однако описанный алгоритм применим и для нахождения разности коллинеарных векторов. На рисунке 14.8 вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Рис. 14.8

Следовательно, ***для любых трех точек O, A и B выполняется равенство*** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, которое выражает **правило нахождения разности двух векторов**, отложенных от одной точки.

Теорема 14.2. ***Если координаты векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ ***соответственно равны*** $(a_1; a_2)$ ***и*** $(b_1; b_2)$***, то координаты вектора*** $\vec{a} - \vec{b}$ ***равны*** $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Из теоремы 14.2 следует, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственный вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Определение. Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **противоположный** вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ противоположный вектору $\vec{a}$.

Вектором, противоположным нулевому вектору, считают нулевой вектор.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают так: $-\vec{a}$.

Из определения следует, что противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$ является вектор $\overrightarrow{BA}$. Тогда ***для любых точек A и B выполняется равенство*** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Из правила треугольника следует, что

$$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}.$$

А из этого равенства следует, что если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ имеет координаты $(-a_1;\ -a_2)$.

Теорема 14.3. ***Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.***

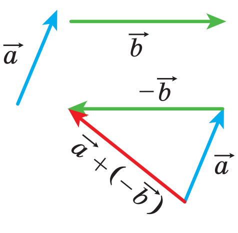


Рис. 14.9

Для доказательства достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правой и левой частях равенства. Сделайте это самостоятельно.

Теорема 14.3 позволяет свести вычитание векторов к сложению: *чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, можно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $-\vec{b}$* (рис. 14.9).

Задача. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 14.10). Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

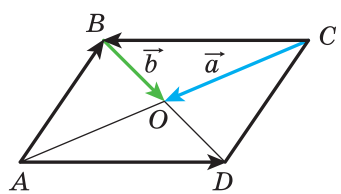


Рис. 14.10

Решение. Поскольку точка O — середина отрезков AC и BD, то $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Имеем:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BO} = -\vec{a} - \vec{b}$;

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$;

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$. ◀

1. Опишите правило треугольника для нахождения суммы векторов.
2. Какое равенство выражает правило треугольника для нахождения суммы векторов?
3. Чему равны координаты вектора, равного сумме двух данных векторов?
4. Запишите равенства, выражающие свойства сложения векторов.
5. Опишите правило параллелограмма для нахождения суммы двух векторов.
6. Какой вектор называют разностью двух векторов?
7. Какое равенство выражает правило нахождения разности двух векторов, отложенных от одной точки?
8. Чему равны координаты вектора, равного разности двух данных векторов?
9. Какие векторы называют противоположными?
10. Как обозначают вектор, противоположный вектору $\vec{a}$?
11. Как можно свести вычитание векторов к сложению векторов?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

14.1.° С помощью правила треугольника постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 14.11.

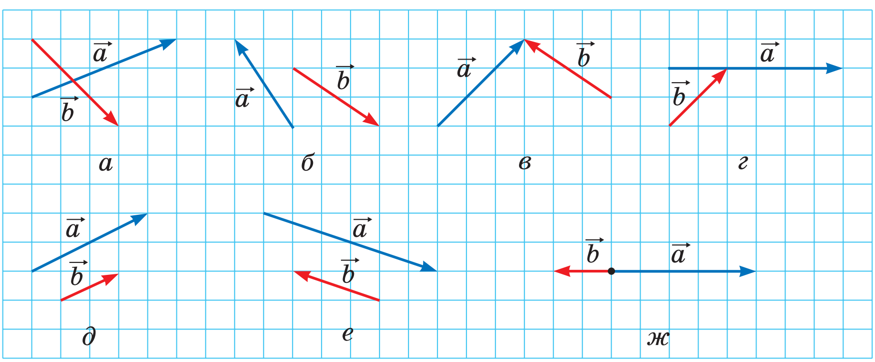


Рис. 14.11

14.2.° С помощью правила параллелограмма постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 14.11, *а–г*.

14.3.° Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 14.11, постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

14.4.° Начертите треугольник ABC. Отложите от точки A вектор, противоположный вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$.

14.5.° Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

14.6.° Начертите треугольник MNP. Постройте векторы $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

14.7.° Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

14.8.° Начертите треугольник ABC. Постройте векторы $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

14.9.° Отметьте четыре точки M, N, P и Q. Постройте вектор $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$.

14.10.° Для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, изображенных на рисунке 14.12, постройте вектор: 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

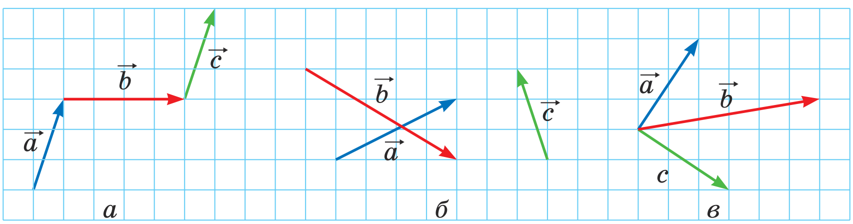


Рис. 14.12

14.11.• Отложите от одной точки три вектора, модули которых равны, так, чтобы сумма двух из них была равна третьему вектору.

14.12.• Отложите от одной точки три вектора, модули которых равны, так, чтобы их сумма была равна нуль-вектору.

14.13.• Для точек A, B, C и D, изображенных на рисунке 14.13, постройте такой вектор $\vec{x}$, чтобы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\vec{0}$.

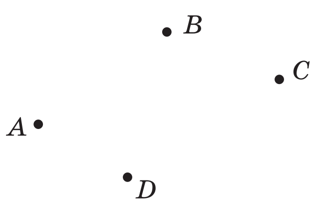


Рис. 14.13

14.14.• Начертите треугольник ABC. Постройте такую точку X, чтобы:

1) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$;

2) $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA}$.

УПРАЖНЕНИЯ

14.15.° Дан треугольник ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы:

1) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

14.16.° Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$.

14.17.° Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$.

14.18.° Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$.

14.19.° Докажите, что для любых точек A, B, C и D выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$;
3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

14.20.° Докажите, что для любых точек A, B, C и D выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$.

14.21.° Точки M и N — середины соответственно сторон BA и BC треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{NB}$ через векторы $\overrightarrow{BM} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{BN} = \vec{n}$.

14.22.° В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

14.23.° Даны четырехугольник $ABCD$ и некоторая точка O. Известно, что $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

14.24.° Даны четырехугольник $ABCD$ и некоторая точка O. Известно, что $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

14.25.° Даны векторы $\vec{a}\,(4; -5)$ и $\vec{b}\,(-1; 7)$. Найдите:

1) координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$;
2) $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

14.26.° Дано точки A (1; −3), B (4; 5), C (−2; −1) и D (3; 0). Найдите:
1) координаты векторов $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$;
2) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right|$ и $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right|$.

14.27.° Сумма векторов $\vec{a}\,(5; -3)$ и $\vec{b}\,(x; 4)$ равна вектору $\vec{c}\,(2; y)$. Найдите x и y.

14.28.° Сумма векторов $\vec{a}\,(x; -1)$ и $\vec{b}\,(2; y)$ равна вектору $\vec{c}\,(-3; 4)$. Найдите x и y.

14.29.° Дан вектор $\overrightarrow{MN}\,(3; -5)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{NM}$.

14.30.° Сторона равностороннего треугольника ABC равна 3 см. Найдите $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$.

14.31.° Катет равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$) равен 4 см. Найдите $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right|$.

14.32.° Даны точки N (3; −5) и F (4; 1). Найдите $\left|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OF}\right|$ и $\left|\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OF}\right|$, где O — произвольная точка.

14.33.° Пловчиха со скоростью $\sqrt{3}$ м/с относительно воды переплывает речку в направлении, перпендикулярном параллельным берегам. Скорость течения равна 1 м/с. Под каким углом к направлению, перпендикулярному берегам, перемещается пловчиха?

14.34.• Докажите, что для любых n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выполняется равенство $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

14.35.• Докажите, что для любых точек A, B, C, D и E выполняется равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$.

14.36.• Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ (рис. 14.14).

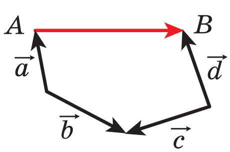


Рис. 14.14

14.37.• В параллелограмме $ABCD$ точки M, N и K — середины соответственно сторон AB, BC и CD. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{MN}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{KN}=\vec{n}$.

14.38.• В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{DO}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$.

14.39.• Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что:
1) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

14.40.• В треугольнике ABC проведена медиана BM. Докажите, что:
1) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

14.41.• Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

14.42.• Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a}-\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

14.43.•• Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Докажите, что $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

14.44.•• Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Докажите, что $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

14.45.•• Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:
1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

14.46.•• Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

14.47.•• Векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{EF}$ попарно неколлинеарны, причем $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам MN, PQ и EF.

14.48.•• Докажите, что для параллелограмма $ABCD$ и произвольной точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$.

14.49.•• Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{AB}|$.

14.50.•• Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{BX}|$.

14.51.•• Гребец из точки A переправляется через речку шириной 240 м с постоянной собственной скоростью, направляя нос лодки перпендикулярно противоположному берегу. Через 4 мин лодка причаливает к противоположному берегу в точке C, расположенной на 48 м ниже по течению, чем точка A. Найдите скорость течения и скорость лодки относительно берегов реки.

14.52.•• Катер из точки A переправляется через речку шириной 300 м с постоянной собственной скоростью. Через 100 с катер причаливает к противоположному берегу в точке B. Прямая AB

перпендикулярна параллельным берегам речки. Скорость течения речки $\sqrt{3}$ м/с. Под каким углом к берегу речки был направлен нос катера?

14.53.* Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

14.54.* На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены параллелограммы AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 попарно непараллельны. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

14.55. В треугольник ABC вписан параллелограмм $CDMK$ так, что угол C у них общий, а точки D, M и K принадлежат соответственно сторонам AC, AB и BC треугольника. Найдите стороны параллелограмма $CDMK$, если его периметр равен 20 см, $AC=12$ см, $BC=9$ см.

14.56. Три окружности, радиусы которых равны 1 см, 2 см и 3 см, попарно внешне касаются друг друга. Найдите радиус окружности, проходящей через центры данных окружностей.

14.57. Докажите, что площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность, составляет $\frac{3}{4}$ площади правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

15. Умножение вектора на число

Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. На рисунке 15.1 изображены вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}+\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Очевидно, что

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\vec{a}\right| \text{ и } \overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\vec{a},$$
$$\left|\overrightarrow{CD}\right|=3\left|\vec{a}\right| \text{ и } \overrightarrow{CD}\uparrow\downarrow\vec{a}.$$

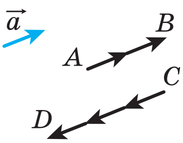


Рис. 15.1

Вектор $\overrightarrow{AB}$ обозначают $2\vec{a}$ и считают, что он получен в результате **умножения вектора $\vec{a}$ на число** 2. Аналогично считают, что вектор $\overrightarrow{CD}$ получен в результате умножения вектора $\vec{a}$ на число -3, и записывают: $\overrightarrow{CD}=-3\vec{a}$.

Этот пример подсказывает, как ввести понятие «умножение вектора на число».

Определение. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Пишут: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то считают, что $k\vec{a} = \vec{0}$.

На рисунке 15.2 изображены векторы $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$.

Из определения следует, что

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a},$$
$$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

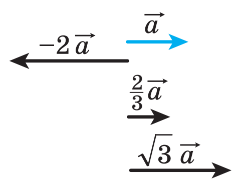


Рис. 15.2

Также из определения следует, что *если $\vec{b} = k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.*

А если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то можно ли представить вектор $\vec{b}$ в виде произведения $k\vec{a}$? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 15.1. ***Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.***

Доказательство. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то при $k = 0$ получаем, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{b} \neq \vec{0}$, то или $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, или $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Пусть $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Рассмотрим вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, где $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Поскольку $k > 0$, то $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, следовательно, $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Кроме того, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким образом, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ сонаправлены и их модули равны. Отсюда $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Пусть $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Рассмотрим вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, где $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Для этого случая завершите доказательство самостоятельно. ◄

Теорема 15.2. ***Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $(ka_1; ka_2)$.***

Доказательство. Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k=0$, то утверждение теоремы очевидно.

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $k \neq 0$. Рассмотрим вектор $\vec{b}\,(ka_1; ka_2)$. Покажем, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Имеем:

$$|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k|\,|\vec{a}|.$$

Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, равные соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку прямая OA проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид $ax+by=0$.

Этой прямой принадлежит точка $A\,(a_1; a_2)$. Тогда

$$aa_1+ba_2=0. \text{ Отсюда } a\,(ka_1)+b\,(ka_2)=0.$$

Следовательно, точка $B\,(ka_1; ka_2)$ также принадлежит прямой OA, поэтому векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны, то есть $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

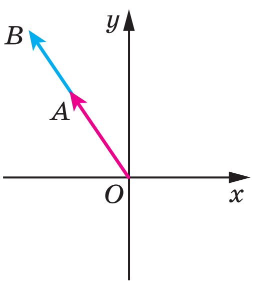


Рис. 15.3

При $k>0$ числа a_1 и ka_1 имеют одинаковые знаки (или оба равны нулю). Таким же свойством обладают числа a_2 и ka_2. Следовательно, при $k>0$ точки A и B лежат в одной координатной четверти (или на одном координатном луче), поэтому векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ сонаправлены (рис. 15.3), то есть $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. При $k<0$ векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ будут противоположно направленными, то есть $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Следовательно, мы получили, что $\vec{b} = k\vec{a}$. ◀

Следствие 1. ***Векторы $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ и $\vec{b}\,(ka_1; ka_2)$ коллинеарны.***

Следствие 2. ***Если векторы $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ коллинеарны, причем $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $b_1=ka_1$ и $b_2=ka_2$.***

С помощью теоремы 15.2 можно доказать такие свойства умножения вектора на число.

Для любых чисел k, m и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ выполняются равенства:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ — сочетательное свойство;

2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ — первое распределительное свойство;

3) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — второе распределительное свойство.

Для доказательства этих свойств достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правых и левых частях равенств. Сделайте это самостоятельно.

Эти свойства позволяют преобразовывать выражения, содержащие сумму векторов, разность векторов и произведение векторов на число, аналогично тому, как мы преобразовываем алгебраические выражения. Например,

$$2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}.$$

Задача 1. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, то точки O, A и B лежат на одной прямой.

Решение. Из условия следует, что векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны. Кроме того, эти векторы отложены от одной точки O. Следовательно, точки O, A и B лежат на одной прямой. ◄

Задача 2. Точка M — середина отрезка AB и X — произвольная точка (рис. 15.4). Докажите, что $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

Решение. Применяя правило треугольника, запишем:

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AM};$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM}.$$

Сложим эти два равенства:

$$2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

Поскольку векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ противоположны, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$. Имеем: $2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$.

Отсюда $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$. ◄

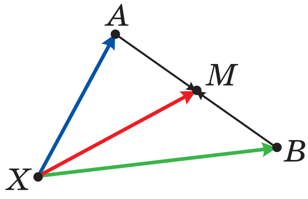


Рис. 15.4

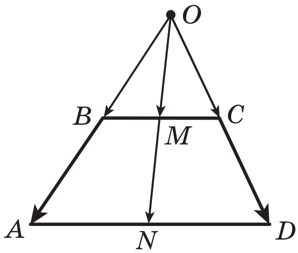


Рис. 15.5

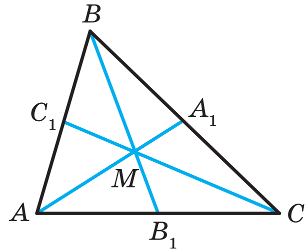


Рис. 15.6

Задача 3. Докажите, что середины оснований трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.

Решение. Пусть точки M и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, O — точка пересечения прямых AB и CD (рис. 15.5).

Применяя ключевую задачу 2, запишем: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$.

Поскольку $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OD}$, то $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, где k и k_1 — некоторые числа.

Поскольку $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, то $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$. Следовательно, $k = k_1$.

Имеем: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}\right) = k \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) = k\overrightarrow{ON}$.

Из ключевой задачи 1 следует, что точки O, M, N лежат на одной прямой. ◄

Задача 4. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Решение[1]. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC (рис. 15.6). Имеем:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right);$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right);$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}\right).$$

[1] В указании к задаче 14.53 приведен другой способ решения задачи 4.

Отсюда $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}.$

Из свойства медиан треугольника следует, что $AM=\frac{2}{3}AA_1.$ Тогда $\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}.$ Аналогично $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1},$ $\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}.$

Отсюда

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)=\vec{0}.$$ ◄

1. Что называют произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля?
2. Чему равно произведение $k\vec{a}$, если $k=0$ или $\vec{a}=\vec{0}$?
3. Что можно сказать о ненулевых векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{b}=k\vec{a}$, где k — некоторое число?
4. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, причем $\vec{a}\neq\vec{0}$. Как можно выразить вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?
5. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2)$. Чему равны координаты вектора $k\vec{a}$?
6. Что можно сказать о векторах, координаты которых равны $(a_1;\ a_2)$ и $(ka_1;\ ka_2)$?
7. Как связаны между собой соответствующие координаты коллинеарных векторов $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$?
8. Запишите сочетательное и распределительные свойства умножения вектора на число.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

15.1.° Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 15.7). Постройте вектор:

1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{c}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{6}\vec{a}$.

15.2.° Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 15.7). Постройте вектор:

1) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $-\frac{2}{3}\vec{c}$.

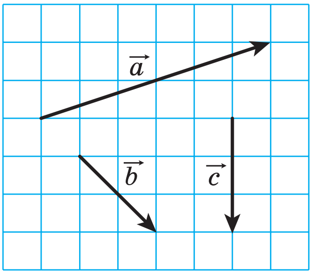


Рис. 15.7

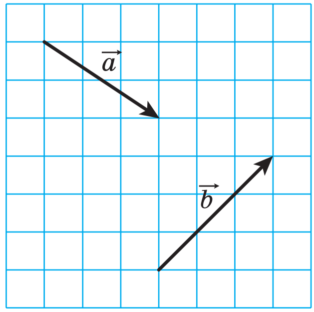


Рис. 15.8

15.3.° Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 15.8). Постройте вектор:

1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

15.4.° Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Отметьте произвольную точку O. От точки O отложите вектор:

1) $3\vec{x}+\vec{y}$; 2) $\vec{x}+2\vec{y}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$; 4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

15.5.• Постройте три точки A, B и C такие, что:

1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$;

2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$;

3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;

4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

15.6.• Начертите треугольник ABC. Отметьте точку M — середину стороны AC.

1) От точки M отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2) От точки B отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

15.7.• Начертите трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Отметьте точку M — середину стороны AB. От точки M отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

15.8.• Начертите треугольник ABC. Постройте вектор, равный вектору $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, так, чтобы его начало принадлежало стороне AB, а конец — стороне BC.

УПРАЖНЕНИЯ

15.9.° Найдите модули векторов $3\vec{m}$ и $-\frac{1}{2}\vec{m}$, если $|\vec{m}| = 4$.

15.10.° Какой из векторов, $3\vec{a}$ или $-\frac{1}{3}\vec{a}$, сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$?

15.11.° Определите, сонаправленными или противоположно направленными являются ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{b} = 2\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b} = \sqrt{2}\,\vec{a}$.

Найдите отношение $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

15.12.° Выразите вектор $\vec{p}$ из равенства:

1) $\vec{q} = 3\vec{p}$; 2) $\overrightarrow{AC} = -2\vec{p}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{p} = \vec{q}$; 4) $2\vec{p} = 3\vec{q}$.

15.13.° В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите:

1) вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$;
2) вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектор $\overrightarrow{BO}$;
3) вектор $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

15.14.° В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

15.15.° В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отметили точку M так, что $AM : MC = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{MC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

15.16.° В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны BC, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

15.17.° В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Выразите:

1) вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CA}$;
2) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{MN}$.

15.18.° На отрезке AB длиной 18 см отметили точку C так, что $BC = 6$ см. Выразите:

1) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$;

2) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$;

3) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$.

15.19.° Дан вектор $\vec{a}\,(-4;\ 2)$. Найдите координаты и модули векторов $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$ и $\frac{3}{2}\vec{a}$.

15.20.° Дан вектор $\vec{b}\,(-6;\ 12)$. Найдите координаты и модули векторов $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$ и $\frac{2}{3}\vec{b}$.

15.21.° Дан вектор $\vec{a}\,(3;\ -2)$. Какие из векторов $\vec{b}\,(-3;\ -2)$, $\vec{c}\,(-6;\ 4)$, $\vec{d}\left(\frac{3}{2};\ -1\right)$, $\vec{e}\left(-1;\ -\frac{2}{3}\right)$ и $\vec{f}\left(-3\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right)$ коллинеарны вектору $\vec{a}$?

15.22.° Даны векторы $\vec{a}\,(3;\ -3)$ и $\vec{b}\,(-16;\ 8)$. Найдите координаты вектора:

1) $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b}$.

15.23.° Даны векторы $\vec{m}\,(-2;\ 4)$ и $\vec{n}\,(3;\ -1)$. Найдите координаты вектора:

1) $3\vec{m} + 2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m} + 2\vec{n}$; 3) $\vec{m} - 3\vec{n}$.

15.24.• На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

15.25.• Точки O, A и B лежат на одной прямой. Докажите, что существует такое число k, что $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$.

15.26.• На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Выразите вектор $\overrightarrow{NM}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

15.27.• На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки E и F так, что $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

15.28.• Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, если $A\,(1;\ 1)$, $B\,(3;\ -2)$, $C\,(-1;\ 3)$, $D\,(5;\ -6)$.

15.29.$^{\bullet}$ Среди векторов $\vec{a}\,(1; -2)$, $\vec{b}\,(-3; -6)$, $\vec{c}\,(-4; 8)$ и $\vec{d}\,(-1; -2)$ укажите пары коллинеарных векторов.

15.30.$^{\bullet}$ Даны векторы $\vec{m}\,(4; -6)$, $\vec{n}\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ и $\vec{k}\left(3; -\frac{9}{2}\right)$. Укажите пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

15.31.$^{\bullet}$ Найдите значения x, при которых векторы $\vec{a}\,(1; x)$ и $\vec{b}\left(\frac{x}{4}; 4\right)$ коллинеарны.

15.32.$^{\bullet}$ При каких значениях y векторы $\vec{a}\,(2; 3)$ и $\vec{b}\,(-1; y)$ коллинеарны?

15.33.$^{\bullet}$ Дан вектор $\vec{b}\,(-3; 1)$. Найдите координаты вектора, коллинеарного вектору $\vec{b}$, модуль которого в два раза больше модуля вектора $\vec{b}$. Сколько решений имеет задача?

15.34.$^{\bullet}$ Найдите координаты вектора $\vec{m}$, противоположно направленного вектору $\vec{n}\,(5; -12)$, если $|\vec{m}| = 39$.

15.35.$^{\bullet}$ Найдите координаты вектора $\vec{a}$, сонаправленного с вектором $\vec{b}\,(-9; 12)$, если $|\vec{a}| = 5$.

15.36.$^{\bullet}$ Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A\,(-1; 2)$, $B\,(3; 5)$, $C\,(14; 6)$ и $D\,(2; -3)$ является трапецией.

15.37.$^{\bullet}$ Докажите, что точки $A\,(-1; 3)$, $B\,(4; -7)$ и $D\,(-2; 5)$ лежат на одной прямой.

15.38.$^{\bullet}$ Даны векторы $\vec{a}\,(1; -4)$, $\vec{b}\,(0; 3)$ и $\vec{c}\,(2; -17)$. Найдите такие числа x и y, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

15.39.$^{\bullet\bullet}$ В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На стороне BC отметили точку K так, что $BK : KC = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{OK}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

15.40.$^{\bullet\bullet}$ Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O так, что $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

15.41.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки K и F так, что $AK : KB = 1 : 2$ и $BF : FC = 2 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$ и $\overrightarrow{KF}$ через векторы $\overrightarrow{BK} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{CF} = \vec{n}$.

15.42.•• На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MC = 1 : 3$ и $BN : NC = 4 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{NM}$ через векторы $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$ и $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$.

15.43.•• Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

15.44.•• С помощью векторов докажите теорему о средней линии треугольника.

15.45.•• Точки M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right)$.

15.46.•• Используя задачу 15.45, докажите теорему о средней линии трапеции.

15.47.•• Точки M и N — соответственно середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Используя задачу 15.45, докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$.

15.48.•• Точки M и N — соответственно середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Используя задачу15.45, докажите, что $MN \parallel AD$.

15.49.•• На стороне AC треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MC = 2 : 3$. Докажите, что $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

15.50.•• На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Докажите, что $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

15.51.* Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника.

15.52.* Точки M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что середины отрезков A_1A_2, M_1M_2 и B_1B_2 лежат на одной прямой.

15.53.* На стороне AD и на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M и N так, что $AM = \frac{1}{5}AD$ и $AN = \frac{1}{6}AC$. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

15.54. Меньшее основание и боковая сторона равнобокой трапеции равны 12 см. Чему равна средняя линия трапеции, если один из углов трапеции равен 60°?

15.55. Диагонали параллелограмма равны 6 см и 16 см, а одна из сторон — 7 см. Найдите угол между диагоналями параллелограмма и площадь параллелограмма.

15.56. Найдите хорду окружности радиуса R, концы которой разбивают эту окружность на две дуги, длины которых относятся как 2 : 1.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

15.57. Дан квадрат размером 101×101 клетку. Клетки квадрата раскрасили в шахматном порядке в черный и белый цвета так, что центральная клетка оказалась черной. Для каждой пары разноцветных клеток откладывают вектор, начало которого совпадает с центром черной клетки, а конец — с центром белой. Докажите, что сумма всех отложенных векторов равна нуль-вектору.

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Применяя векторы к решению задач, часто используют следующую лемму.

Лемма. ***Пусть M — такая точка отрезка AB, что $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$*** (рис. 15.9). ***Тогда для любой точки X выполняется равенство***

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}.$$

Поскольку $AM = \frac{m}{m+n}AB$, то

$$\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}.$$

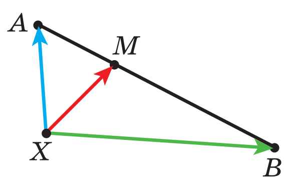


Рис. 15.9

Запишем: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, то имеем:

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}\right);$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \blacktriangleleft$$

Заметим, что эта лемма является обобщением ключевой задачи 2 п. 15.

Задача 1. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC и X — произвольная точка (рис. 15.10). Докажите, что

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right).$$

Решение. Пусть точка K — середина отрезка AC. Имеем: $BM : MK = 2 : 1$. Тогда, используя лемму, можно записать:

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right). \blacktriangleleft$$

Докажем векторное равенство, связывающее две замечательные[1] точки треугольника.

Теорема. ***Если точка H — ортоцентр треугольника ABC, а точка O — центр его описанной окружности, то***

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (*)$$

Доказательство. Для прямоугольного треугольника равенство (*) очевидно.

Пусть треугольник ABC не является прямоугольным. Опустим из точки O перпендикуляр OK на сторону AC треугольника ABC (рис. 15.11). В курсе геометрии 8 класса было доказано, что $BH = 2OK$.

На луче OK отметим точку P такую, что $OK = KP$. Тогда $BH = OP$. Поскольку $BH \parallel OP$, то четырехугольник $HBOP$ — параллелограмм.

По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

Поскольку точка K является серединой отрезка AC, то в четырехугольнике $AOCP$ диагонали точкой пересечения делятся пополам.

---

[1] Материал о замечательных точках треугольника см. в учебнике «Геометрия. 8 класс».

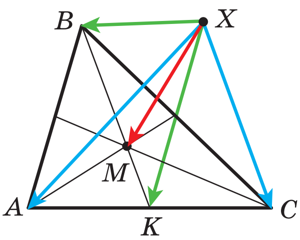


Рис. 15.10

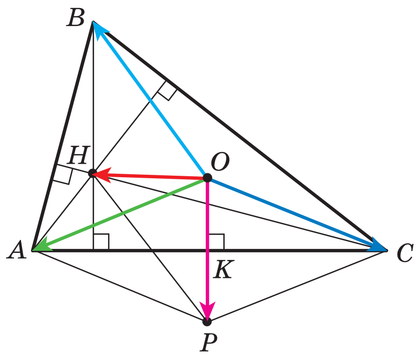


Рис. 15.11

Следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм. Отсюда $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Имеем: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. ◀

Обратимся к векторному равенству $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Так как X — произвольная точка, то равенство остается справедливым, если в качестве точки X выбрать точку O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Имеем: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Учитывая равенство (*), получаем: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$.

Это равенство означает, что точки O, M и H лежат на одной прямой, которую называют **прямой Эйлера**. Напомним, что это замечательное свойство было доказано в курсе геометрии 8 класса, но другим способом.

16. Скалярное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых и несонаправленных вектора (рис. 16.1). От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Величину угла AOB будем называть **углом между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

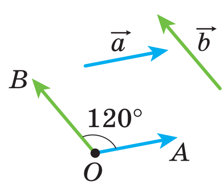


Рис. 16.1

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Например, на рисунке 16.1 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, а на рисунке 16.2 $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 180°$.

Рис. 16.2

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то также считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Следовательно, для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место неравенство:

$$0° \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180°.$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Пишут: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Вы умеете складывать и вычитать векторы, умножать вектор на число. Также из курса физики вы знаете, что если под действием постоянной силы $\vec{F}$ тело переместилось из точки A в точку B (рис. 16.3), то совершенная механическая работа равна $|\vec{F}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, где $\varphi = \angle(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

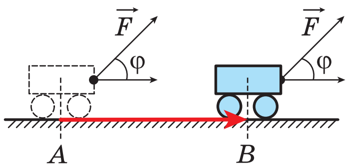


Рис. 16.3

Изложенное выше подсказывает, что целесообразно ввести еще одно действие над векторами.

Определение. Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Имеем:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то очевидно, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Пусть $\vec{a}=\vec{b}$. Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0°=|\vec{a}|^2$.

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называют **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$.

Мы получили, что $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$, то есть ***скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.***

Теорема 16.1. ***Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.***

Доказательство. ⊙ Пусть $\vec{a}\perp\vec{b}$. Докажем, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Имеем: $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$. Отсюда $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90°=0$.

Пусть теперь $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Докажем, что $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Запишем: $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0$. Поскольку $|\vec{a}|\neq 0$ и $|\vec{b}|\neq 0$, то $\angle(\vec{a},\vec{b})=0$. Отсюда $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$, то есть $\vec{a}\perp\vec{b}$. ◄

Теорема 16.2. ***Скалярное произведение векторов*** $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ ***и*** $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$ ***можно вычислить по формуле***

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$$

Доказательство. ⊛ Сначала рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

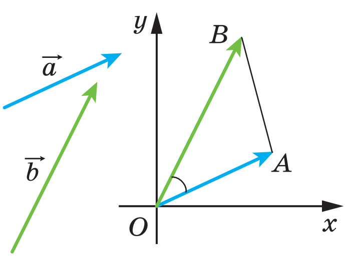


Рис. 16.4

Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 16.4). Тогда $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle AOB$.

Применим теорему косинусов к треугольнику AOB:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB.$$

Отсюда $OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)$.

Поскольку $|\vec{a}|=OA$ и $|\vec{b}|=OB$, то $OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Кроме того, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$. Отсюда $\overrightarrow{AB}(b_1-a_1;\ b_2-a_2)$.

Имеем: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2\right)$. Воспользовавшись формулой нахождения модуля вектора по его координатам, запишем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left(a_1^2+a_2^2\right)+\left(b_1^2+b_2^2\right)-\left(b_1-a_1\right)^2-\left(b_2-a_2\right)^2\right).$$

Упрощая выражение, записанное в правой части последнего равенства, получаем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то очевидно, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$.

Если $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b}=k\vec{a}$, то есть $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$.

Если $k>0$, то $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$. Имеем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{a})=|\vec{a}|\,|k\vec{a}|\cos 0°=|k|\,|\vec{a}|^2=k\left(a_1^2+a_2^2\right)=$$
$$=a_1\cdot ka_1+a_2\cdot ka_2=a_1b_1+a_2b_2.$$

Случай, когда $k<0$, рассмотрите самостоятельно. ◀

Следствие. ***Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ можно вычислить по формуле***

$$\boxed{\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}}\qquad(*)$$

Доказательство. ⊙ Из определения скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$. Воспользовавшись теоремой 16.2 и формулой нахождения модуля вектора по его координатам, получаем формулу (*). ◀

С помощью теоремы 16.2 легко доказать следующие свойства скалярного произведения векторов.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ — переместительное свойство;

2) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ — сочетательное свойство;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ — распределительное свойство.

Для доказательства этих свойств достаточно выразить через координаты векторов скалярные произведения, записанные в правых и левых частях равенств, и сравнить их. Сделайте это самостоятельно.

Эти свойства вместе со свойствами сложения векторов и умножения вектора на число позволяют преобразовывать выражения, содержащие скалярное произведение векторов, аналогично тому, как мы преобразовываем алгебраические выражения.

Например, $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=$
$$=\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$$

Задача 1. С помощью векторов докажите, что диагонали ромба перпендикулярны.

Решение. На рисунке 16.5 изображен ромб $ABCD$. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Очевидно, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. По правилу параллелограмма имеем: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}$.

Отсюда
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})=\vec{b}^2-\vec{a}^2=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=0.$$

Следовательно, $AC\perp BD$. ◀

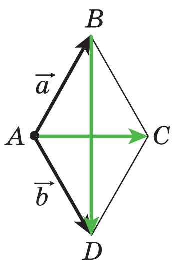


Рис. 16.5

Задача 2. Известно, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$. Найдите $|2\vec{a}-3\vec{b}|$.

Решение. Поскольку скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})^2$. Отсюда
$$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=$$
$$=\sqrt{4|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})+9|\vec{b}|^2}=$$
$$=\sqrt{36+18+9}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$$

Ответ: $3\sqrt{7}$. ◀

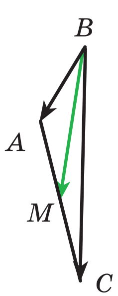


Рис. 16.6

Задача 3. В треугольнике ABC известно, что $AB=4$ см, $BC=6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC=30°$. Найдите медиану BM.

Решение. Применяя ключевую задачу 2 п. 15, запишем: $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$ (рис. 16.6).

Отсюда

$$\overrightarrow{BM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{BA}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\angle ABC + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(16 + 48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 108\right) = 49.$$

Следовательно, $BM^2 = 49$; $BM = 7$ см.

Ответ: 7 см. ◄

?

1. Опишите, как можно построить угол, величина которого равна углу между двумя ненулевыми и несонаправленными векторами.
2. Чему равен угол между двумя сонаправленными векторами?
3. Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если хотя бы один из них нулевой?
4. Как обозначают угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
5. В каких пределах находится угол между любыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
6. Какие векторы называют перпендикулярными?
7. Что называют скалярным произведением двух векторов?
8. Что называют скалярным квадратом вектора?
9. Чему равен скалярный квадрат вектора?
10. Сформулируйте условие перпендикулярности двух ненулевых векторов.
11. Что следует из равенства $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$?
12. Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?
13. Как найти косинус угла между двумя ненулевыми векторами, если известны их координаты?
14. Запишите свойства скалярного произведения векторов.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

16.1.° Постройте угол, величина которого равна углу между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 16.7).

16.2.° Постройте угол, величина которого равна углу между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (рис. 16.8).

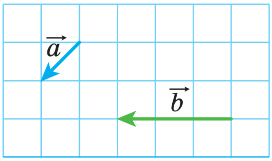


Рис. 16.7

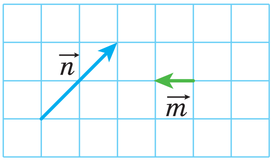


Рис. 16.8

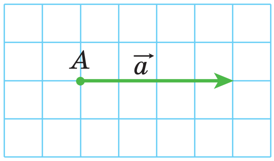


Рис. 16.9

16.3.° На рисунке 16.9 изображен вектор $\vec{a}$ (длина стороны клетки равна 0,5 см). Отложите от точки A вектор $\vec{b}$ такой, что $|\vec{b}| = 3$ см и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Сколько решений имеет задача?

УПРАЖНЕНИЯ

16.4.° На рисунке 16.10 изображен равносторонний треугольник ABC, медианы AM и BK которого пересекаются в точке F. Найдите угол между векторами: 1) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AM}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$; 5) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BK}$; 6) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$; 7) $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AB}$.

16.5.° На рисунке 16.11 изображен квадрат $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Найдите угол между векторами: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CB}$; 5) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CD}$.

16.6.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$;
2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;
3) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$;
4) $|\vec{a}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{b}| = 6$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$;
5) $|\vec{a}| = 0{,}3$, $|\vec{b}| = 0$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 137°$.

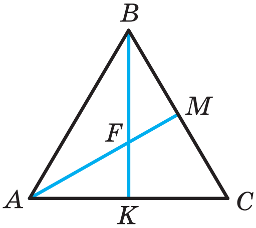


Рис. 16.10

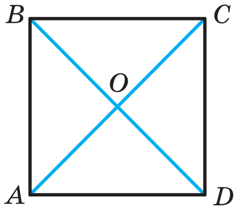


Рис. 16.11

16.7.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

1) $|\vec{m}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 4$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$;

2) $|\vec{m}| = 8$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150°$.

16.8.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}\,(2; -1)$, $\vec{b}\,(1; -3)$;

2) $\vec{a}\,(-5; 1)$, $\vec{b}\,(2; 7)$;

3) $\vec{a}\,(1; -4)$, $\vec{b}\,(8; 2)$.

16.9.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

1) $\vec{m}\,(3; -2)$, $\vec{n}\,(1; 0)$;

2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{n}\,(6; 9)$.

16.10.° На рисунке 16.12 изображен ромб $ABCD$, в котором $AB = 6$, $\angle ABC = 120°$. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$;

2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$;

3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$;

4) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$;

5) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$;

6) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$;

7) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

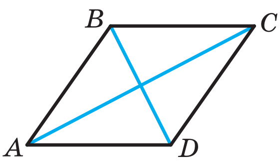


Рис. 16.12

16.11.° В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$;

2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$;

3) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

16.12.° Найдите работу силы величиной 6 Н по перемещению тела на расстояние 7 м, если угол между направлениями силы и перемещения равен 60°.

16.13.° Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}\,(1; -2)$ и $\vec{b}\,(2; -3)$.

16.14.° Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: 1) острый; 2) тупой?

16.15.° Известно, что скалярное произведение векторов является:

1) положительным числом;

2) отрицательным числом.

Определите вид угла между векторами.

16.16.• В равностороннем треугольнике ABC, сторона которого равна 1, медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Вычислите:

1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$;

2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$.

16.17.• Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, сторона которого равна 1. Вычислите:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$;

2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{ED}$;

4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

16.18.$^{\bullet}$ При каком значении x векторы $\vec{a}\,(3;\,x)$ и $\vec{b}\,(1;\,9)$ перпендикулярны?

16.19.$^{\bullet}$ Известно, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Докажите, что векторы $\vec{a}\,(-x;\,y)$ и $\vec{b}\,(y;\,x)$ перпендикулярны.

16.20.$^{\bullet}$ При каких значениях x векторы $\vec{a}\,(2x;\,-3)$ и $\vec{b}\,(x;\,6)$ перпендикулярны?

16.21.$^{\bullet}$ При каком значении y скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(4;\,y)$ и $\vec{b}\,(3;\,-2)$ равно 14?

16.22.$^{\bullet}$ При каких значениях x угол между векторами $\vec{a}\,(2;\,5)$ и $\vec{b}\,(x;\,4)$: 1) острый; 2) тупой?

16.23.$^{\bullet}$ Найдите координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a}\,(3;\,-4)$, если $\vec{a}\cdot\vec{b} = -100$.

16.24.$^{\bullet}$ Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. При каких значениях x векторы $\vec{a} + x\vec{b}$ и $\vec{a} - x\vec{b}$ перпендикулярны?

16.25.$^{\bullet}$ Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

16.26.$^{\bullet}$ Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Найдите скалярное произведение $(2\vec{a} - \vec{b})\cdot\vec{b}$.

16.27.$^{\bullet}$ Найдите скалярное произведение $(\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b})$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

16.28.$^{\bullet}$ Известно, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$. Найдите $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$.

16.29.$^{\bullet}$ Известно, что $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60^\circ$. Найдите $|2\vec{m} - 3\vec{n}|$.

16.30.$^{\bullet}$ Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A\,(3;\,-2)$, $B\,(4;\,0)$, $C\,(2;\,1)$ и $D\,(1;\,-1)$ является прямоугольником.

16.31.$^{\bullet}$ Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A\,(-1;\,4)$, $B(-2;\,5)$, $C\,(-1;\,6)$ и $D\,(0;\,5)$ является квадратом.

16.32.$^{\bullet}$ Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A\,(1;\,6)$, $B\,(-2;\,3)$ и $C\,(2;\,-1)$.

16.33.$^{\bullet}$ Найдите углы треугольника с вершинами $A\,(0;\,6)$, $B\left(4\sqrt{3};\,6\right)$ и $C\left(3\sqrt{3};\,3\right)$.

16.34.• Докажите, что для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $-|\vec{a}||\vec{b}| \leqslant \vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$.

16.35.• Определите взаимное расположение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$; 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$.

16.36.•• Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если

$$(\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (\vec{m} - \vec{n}) = -11, \quad |\vec{m}| = 2, \quad |\vec{n}| = 3.$$

16.37.•• Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{3}{2}, \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1.$$

16.38.•• В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{2}$. Докажите, что его медианы AK и CM перпендикулярны.

16.39.•• В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Найдите угол между прямыми AB и DC.

16.40.•• В треугольнике ABC проведена медиана BD. Известно, что $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$. Найдите угол ABD.

16.41.* На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABMN$ и $BCKF$. Докажите, что медиана BD треугольника ABC перпендикулярна прямой MF.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

16.42. Точка M — середина диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 16.13). Докажите, что четырехугольники $ABMD$ и $CBMD$ равновелики.

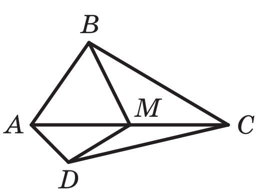


Рис. 16.13

16.43. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей ромба, делит его сторону на отрезки, один из которых на 7 см больше другого. Найдите периметр ромба, если его высота равна 24 см.

16.44. На высоте правильного треугольника со стороной $6\sqrt{3}$ см как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, расположенной вне треугольника.

ЗАДАНИЕ № 4 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Какая из данных величин является векторной?
А) Масса; В) скорость;
Б) объем; Г) время.

2. Чему равен модуль вектора, начало и конец которого совпадают?
А) 1; В) 5;
Б) −1; Г) 0.

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Какое из равенств является верным?
А) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; В) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$;
Б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; Г) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

4. Известно, что $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Какое из данных утверждений верно?
А) Точка B — середина отрезка AM;
Б) точка A — середина отрезка MB;
В) точка M — середина отрезка AB;
Г) точка M — вершина равнобедренного треугольника AMB.

5. Даны точки $A\ (-3;\ 4)$ и $B\ (1;\ -8)$. Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.
А) $(2;\ -6)$; В) $(-2;\ -6)$;
Б) $(-2;\ 6)$; Г) $(6;\ -2)$.

6. При каком значении x векторы $\vec{a}\ (x;\ 2)$ и $\vec{b}\ (-4;\ 8)$ коллинеарны?
А) −1; В) 0;
Б) 1; Г) $\frac{1}{2}$.

7. Какое из данных равенств верно?
А) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$;
Б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;
В) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$;
Г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.

8. Дан вектор $\vec{a}\left(\sqrt{3};\ -2\right)$. Какой из векторов равен вектору $\sqrt{3}\vec{a}$?
А) $\vec{m}\left(1;\ -2\sqrt{3}\right)$; В) $\vec{p}\,(3; -2)$;
Б) $\vec{n}\left(-3;\ -2\sqrt{3}\right)$; Г) $\vec{q}\left(3;\ -2\sqrt{3}\right)$.

9. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Какое из данных равенств верно?
А) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;
Б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

В) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

Г) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

10. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}\ (2; -3)$ и $\vec{b}\ (3; -2)$.

А) 12; Б) −12; В) 0; Г) 6.

11. При каком значении x векторы $\vec{a}\ (2x; -3)$ и $\vec{b}\ (1; 4)$ перпендикулярны?

А) −6; Б) 3; В) 12; Г) 6.

12. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}\ (5; -12)$ и $\vec{b}\ (-3; 4)$.

А) $\frac{63}{65}$; Б) $\frac{65}{63}$; В) $-\frac{63}{65}$; Г) $\frac{1}{2}$.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 4

Вектор

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка — его концом, то такой отрезок называют направленным отрезком или вектором.

Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

Равные векторы

Ненулевые векторы называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.
Равные векторы имеют равные соответствующие координаты.
Если соответствующие координаты векторов равны, то равны и сами векторы.

Координаты вектора

Если точки $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$ соответственно являются началом и концом вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ равны соответственно первой и второй координатам вектора $\vec{a}$.

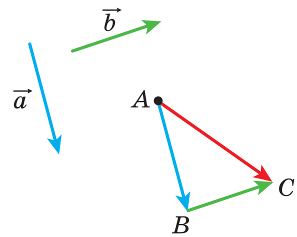
Модуль вектора

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Правила сложения двух векторов

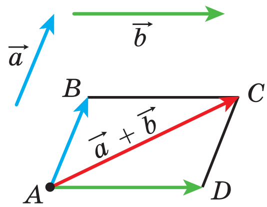
Правило треугольника

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки B — вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ — сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Для любых трех точек A, B и C выполняется равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Правило параллелограмма

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Построим параллелограмм $ABCD$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ — сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Координаты суммы векторов

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$, то координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Свойства сложения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняются равенства:
1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — переместительное свойство;
3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ — сочетательное свойство.

Разность векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.
Для любых трех точек O, A и B выполняется равенство $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

Координаты разности векторов

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1;\ a_2)$ и $(b_1;\ b_2)$, то координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$ равны $(a_1-b_1;\ a_2-b_2)$.

Противоположные векторы

Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены.
Для любых точек A и B выполняется равенство $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $\left|\vec{b}\right|=|k|\left|\vec{a}\right|$;

2) если $k>0$, то $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$; если $k<0$, то $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $k=0$, то считают, что $k\vec{a}=\vec{0}$.

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $(ka_1;\ ka_2)$.

Свойства коллинеарных векторов

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, причем $\vec{a}\neq\vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b}=k\vec{a}$.
Если векторы $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$ коллинеарны, причем $\vec{a}\neq\vec{0}$, то существует такое число k, что $b_1=ka_1$ и $b_2=ka_2$.

Свойства умножения вектора на число

Для любых чисел k, m и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

1) $(km)\vec{a}=k\left(m\vec{a}\right)$ — сочетательное свойство;

2) $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ — первое распределительное свойство;

3) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ — второе распределительное свойство.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ можно вычислить по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k выполняются равенства:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — переместительное свойство;
2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — сочетательное свойство;
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — распределительное свойство.

Условие перпендикулярности двух векторов

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Косинус угла между двумя векторами

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ §5*

В этом параграфе вы узнаете, что такое преобразование фигуры. Ознакомитесь с такими видами преобразований, как параллельный перенос, центральная симметрия, осевая симметрия, поворот, гомотетия, подобие.

Вы научитесь применять свойства преобразований при решении задач и доказательстве теорем.

17. Движение (перемещение) фигуры. Параллельный перенос

Пример 1. На рисунке 17.1 изображены отрезок AB, прямая a и точка O, не принадлежащая ни прямой a, ни прямой AB. Каждой точке X отрезка AB поставим в соответствие точку X_1 прямой a так, чтобы точки O, X и X_1 лежали на одной прямой. Точке A будет соответствовать точка A_1, точке B — точка B_1. Понятно, что все такие точки X_1 образуют отрезок A_1B_1.

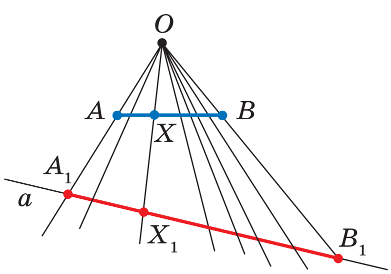


Рис. 17.1

Мы указали правило, с помощью которого каждой точке X отрезка AB поставлена в соответствие единственная точка X_1 отрезка A_1B_1. В этом случае говорят, что отрезок A_1B_1 получен в результате **преобразования** отрезка AB.

Пример 2. На рисунке 17.2 изображены полуокружность AB и прямая a, параллельная диаметру AB. Каждой точке X полуокружности поставим в соответствие точку X_1 прямой a так, чтобы прямая XX_1 была перпендикулярна прямой a. Понятно, что все такие точки X_1 образуют отрезок A_1B_1. В этом случае говорят, что отрезок A_1B_1 получен в результате преобразования полуокружности AB.

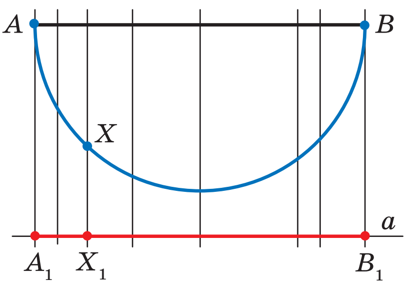


Рис. 17.2

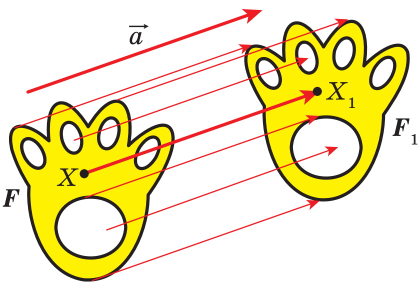


Рис. 17.3

Пример 3. Пусть даны некоторая фигура F и вектор $\vec{a}$ (рис. 17.3). Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1 такую, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 17.3). Такое преобразование фигуры F называют **параллельным переносом на вектор** $\vec{a}$.

Обобщим приведенные примеры.

Пусть задана некоторая фигура F. Каждой точке фигуры F поставим в соответствие (сопоставим) по определенному правилу некоторую точку. Все полученные сопоставленные точки образуют фигуру F_1. Говорят, что **фигура F_1 получена в результате преобразования фигуры F**. При этом фигуру F_1 называют **образом** фигуры F, а фигуру F — **прообразом фигуры F_1**.

Так, в примере 1 отрезок A_1B_1 является образом отрезка AB. Точка X_1 является образом точки X. Отрезок AB — это прообраз отрезка A_1B_1.

Обратим внимание на то, что в примере 3 фигура F равна своему образу F_1. Преобразования, описанные в примерах 1 и 2, таким свойством не обладают.

Какими же свойствами должно обладать преобразование, чтобы образ и прообраз были равными фигурами? Оказывается, что достаточно лишь одного свойства: преобразование должно сохранять расстояние между точками, то есть если A и B — произвольные точки фигуры F, а точки A_1 и B_1 — их образы, то должно выполняться равенство $AB = A_1B_1$.

Определение. Преобразование фигуры F, сохраняющее расстояние между точками, называют движением (перемещением) фигуры F.

Если каждой точке X фигуры F поставлена в соответствие эта же точка X, то такое преобразование фигуры F называют **тождественным**. При тождественном преобразовании образом фигуры F является сама фигура F. Очевидно, что тождественное преобразование является движением.

Мы давно используем понятие «равенство фигур», хотя не давали ему строгого определения.

На то, что движение связано с равенством фигур, указывают следующие свойства движения.

Если преобразование является движением, то:

- *образом прямой является прямая*;
- *образом отрезка является отрезок, равный данному*;
- *образом угла является угол, равный данному*;
- *образом треугольника является треугольник, равный данному*.

Доказательство этих свойств выходит за рамки рассматриваемого курса геометрии.

Свойства движения подсказывают следующее определение.

Определение. Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой.

Запись $F = F_1$ означает, что фигуры F и F_1 равны.

Если существует движение, при котором фигура F_1 является образом фигуры F, то обязательно существует движение, при котором фигура F является образом фигуры F_1. Такие движения называют **взаимно обратными**.

Замечание. Ранее равными фигурами мы называли такие фигуры, которые совпадали при наложении. Термин «наложение» интуитивно понятен, и в нашем представлении он связывается с наложением реальных тел. Но геометрические фигуры нельзя наложить в буквальном смысле этого слова. Теперь наложение фигуры F на фигуру F_1 можно рассматривать как движение фигуры F, при котором ее образом будет фигура F_1.

Термин «движение» также ассоциируется с определенным физическим действием: изменением положения тела без деформации.

Именно с этим связано появление этого термина в математике. Однако в геометрии предметом исследования является не процесс, происходящий во времени, а лишь свойства фигуры и ее образа.

То, что изображенные на рисунке 17.3 фигуры F и F_1 равны, понятно из наглядных соображений. Строгое обоснование этого факта дает следующая теорема.

Теорема 17.1 (свойство параллельного переноса). ***Параллельный перенос является движением.***

Доказательство. Пусть $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ — произвольные точки фигуры F (рис. 17.4), точки A_1 и B_1 — их соответствующие образы при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\,(m; n)$. Докажем, что $AB = A_1B_1$.

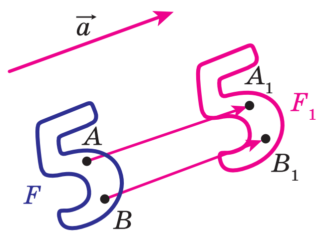


Рис. 17.4

Имеем: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$. Векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ имеют координаты $(m;\ n)$. Следовательно, координатами точек A_1 и B_1 являются соответственно пары чисел $(x_1+m;\ y_1+n)$ и $(x_2+m;\ y_2+n)$.

Найдем расстояние между точками A и B:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Найдем расстояние между точками A_1 и B_1:

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Следовательно, мы показали, что $AB = A_1B_1$, то есть параллельный перенос сохраняет расстояние между точками. ◄

Следствие. ***Если фигура F_1 — образ фигуры F при параллельном переносе, то $F_1 = F$.***

Это свойство используется при создании рисунков на тканях, обоях, покрытиях для пола и т. п. (рис. 17.5).

Рис. 17.5

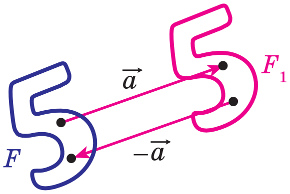


Рис. 17.6

Если фигура F_1 является образом фигуры F при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$, то фигура F является образом фигуры F_1 при параллельном переносе на вектор $-\vec{a}$ (рис. 17.6). Параллельные переносы на векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ являются взаимно обратными движениями.

Задача 1. Каждой точке X $(x;\ y)$ фигуры F ставится в соответствие точка X_1 $(x+m;\ y+n)$, где m и n — заданные числа. Докажите, что такое преобразование фигуры F является параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ $(m; n)$.

Решение. Рассмотрим вектор $\vec{a}$ $(m; n)$. Заметим, что координаты вектора $\overrightarrow{XX_1}$ равны $(m;\ n)$, то есть $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Следовательно, описанное преобразование фигуры F — параллельный перенос на вектор $\vec{a}$. ◄

Задача 2. Точка A_1 $(-2;\ 3)$ является образом точки A $(-1;\ 2)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$ и координаты образа точки B $(-7;\ -3)$.

Решение. Из условия следует, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Отсюда $\vec{a}$ $(-1;\ 1)$.

Пусть B_1 $(x;\ y)$ — образ точки B $(-7;\ -3)$. Тогда $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, то есть $x+7=-1$ и $y+3=1$. Отсюда $x=-8$, $y=-2$.

Ответ: $\vec{a}$ $(-1;\ 1)$, B_1 $(-8;\ -2)$. ◄

Задача 3. Даны угол ABC и прямая p, не параллельная ни одной из сторон этого угла (рис. 17.7). Постройте прямую p_1, параллельную прямой p, так, чтобы стороны угла отсекали на ней отрезок заданной длины a.

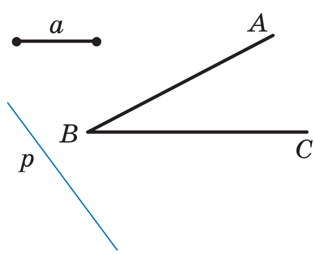


Рис. 17.7

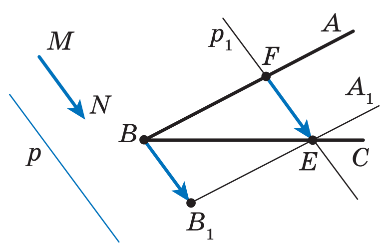


Рис. 17.8

Решение. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MN}$ такой, что $MN \parallel p$ и $\left|\overrightarrow{MN}\right| = a$ (рис. 17.8). Построим луч B_1A_1, являющийся образом луча BA при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$. Обозначим точку пересечения лучей BC и B_1A_1 буквой E. Пусть F — прообраз точки E при рассматриваемом параллельном переносе. Тогда $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{MN}$, то есть $\left|\overrightarrow{FE}\right| = a$ и $FE \parallel p$.

Приведенные рассуждения подсказывают следующий алгоритм построения:

1) найти образ луча BA при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$;
2) отметить точку пересечения луча BC с построенным образом;
3) через найденную точку провести прямую p_1, параллельную прямой p. Прямая p_1 будет искомой. ◄

1. Опишите, что такое преобразование фигуры.
2. Приведите примеры преобразований фигур.
3. Опишите преобразование фигуры F, которое называют параллельным переносом на вектор $\vec{a}$.
4. В каком случае фигуру F_1 называют образом фигуры F, а фигуру F — прообразом фигуры F_1?
5. Какое преобразование фигуры называют движением?
6. Какое преобразование фигуры называют тождественным?
7. Сформулируйте свойства движения.
8. Какие две фигуры называют равными?
9. Опишите, какие движения называют взаимно обратными.
10. Сформулируйте свойство параллельного переноса.
11. Какими движениями являются параллельные переносы на векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

17.1.° На рисунке 17.9 изображены угол AOB и прямая p, не параллельная его сторонам. Каждой точке X стороны OA поставлена в соответствие такая точка X_1 стороны OB, что $XX_1 \parallel p$ (точке O поставлена в соответствие точка O). Постройте образ точки M и прообраз точки K при данном преобразовании луча OA. Какая фигура является образом луча OA?

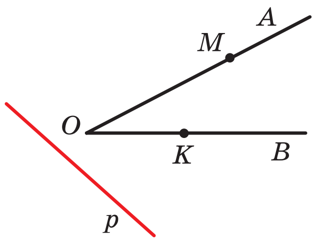


Рис. 17.9

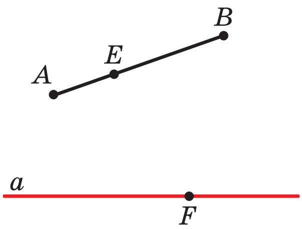


Рис. 17.10

17.2.° На рисунке 17.10 изображены отрезок AB и прямая a. Каждой точке X отрезка AB поставлено в соответствие основание перпендикуляра, опущенного из точки X на прямую a. Постройте образ точки E и прообраз точки F при данном преобразовании отрезка AB. Существуют ли точки прямой a, не имеющие прообраза? Постройте образ отрезка AB.

17.3.° Постройте образы отрезка AB и луча OM при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 17.11).

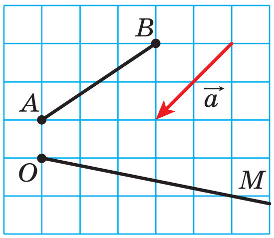


Рис. 17.11

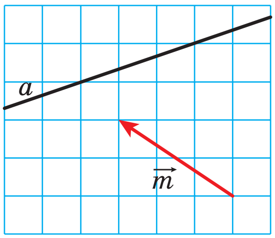


Рис. 17.12

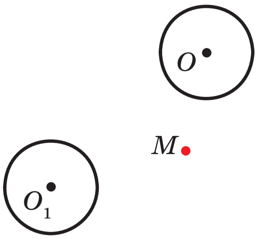


Рис. 17.13

17.4.° На рисунке 17.12 прямая a является образом некоторой прямой при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$. Постройте прообраз прямой a.

17.5.° Окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 17.13). Отложите вектор $\vec{a}$ от точки M.

17.6.• Постройте образ параболы $y=x^2$ при параллельном переносе на вектор: 1) $\vec{a}\,(0;\,2)$; 2) $\vec{b}\,(-1;\,0)$; 3) $\vec{c}\,(-1;\,2)$. Запишите уравнение образа параболы $y=x^2$ при данном параллельном переносе.

17.7.• Постройте образ окружности $x^2+y^2=4$ при параллельном переносе на вектор: 1) $\vec{a}\,(2;\ 0)$; 2) $\vec{b}\,(0;\ -1)$; 3) $\vec{c}\,(2;\ -1)$. Запишите уравнение образа окружности $x^2+y^2=4$ при данном параллельном переносе.

17.8.• Прямая a касается полуокружности AB с центром в точке O (рис. 17.14). Задайте какое-нибудь преобразование, при котором прямая a является образом полуокружности AB с «выколотыми» точками A и B.

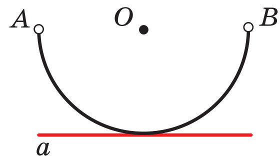


Рис. 17.14

17.9.• Задайте какое-нибудь преобразование, при котором отрезок CD является образом отрезка AB (рис. 17.15).

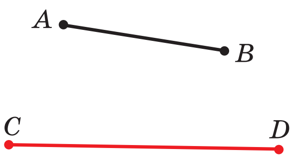


Рис. 17.15

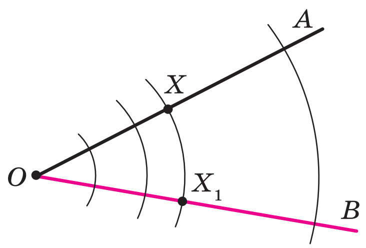


Рис. 17.16

УПРАЖНЕНИЯ

17.10.° Рассмотрим окружность радиуса r с центром в точке O. Каждой точке X окружности поставим в соответствие точку X_1, принадлежащую радиусу OX, такую, что $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Какая фигура является образом данной окружности? Является ли движением описанное преобразование?

17.11.° Дан угол AOB (рис. 17.16). Каждой точке X стороны OA поставим в соответствие точку X_1, которая принадлежит стороне OB и лежит на окружности радиуса OX с центром O (точке O поставим в соответствие саму точку O). Какая фигура является образом стороны OA? Докажите, что описанное преобразование является движением.

17.12.° Дан угол MON. Каждой точке X стороны OM поставим в соответствие такую точку X_1 стороны ON, что прямая XX_1 перпендикулярна биссектрисе угла MON (точке O поставим в соответствие саму точку O). Докажите, что описанное преобразование является движением.

17.13.° Даны прямая a и отрезок AB, не имеющий с ней общих точек. Каждой точке X отрезка AB поставим в соответствие основание перпендикуляра, опущенного из точки X на прямую a. При каком взаимном расположении прямой a и отрезка AB описанное преобразование является движением?

17.14.° Точки A_1 и B_1 не принадлежат прямой AB и являются образами соответственно точек A и B при параллельном переносе прямой AB. Докажите, что четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм.

17.15.° Точки A_1 и B_1 являются образами соответственно точек A и B при параллельном переносе отрезка AB. Найдите отрезок A_1B_1, если $AB = 5$ см.

17.16.° Вектор $\vec{m}$ параллелен прямой a. Какая фигура является образом прямой a при ее параллельном переносе на вектор $\vec{m}$?

17.17.° Дан параллелограмм $ABCD$. Какой вектор задает параллельный перенос, при котором сторона AD является образом стороны BC?

17.18.° Существует ли параллельный перенос равностороннего треугольника ABC, при котором сторона AB является образом стороны BC?

17.19.° Найдите точки, являющиеся образами точек $A\ (-2; 3)$ и $B\ (1; -4)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\ (-1; -3)$.

17.20.° Существует ли параллельный перенос, при котором образом точки $A\ (1; 3)$ является точка $A_1\ (4; 0)$, а образом точки $B\ (-2; 1)$ — точка $B_1\ (1; 4)$?

17.21.° При параллельном переносе на вектор $\vec{a}\ (2; -1)$ образом точки A является точка $A_1\ (-3; 4)$. Найдите координаты точки A.

17.22.° Точка $M_1\ (x; 2)$ является образом точки $M\ (3; y)$ при параллельном переносе, при котором точка $A\ (2; 3)$ является образом начала координат. Найдите x и y.

17.23.• Сколько существует параллельных переносов прямой a, при которых ее образом является прямая a?

17.24.• Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, принадлежащих сторонам прямоугольника. Опишите какое-нибудь преобразование этой фигуры, при котором ее образом является окружность.

17.25.° Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, принадлежащих сторонам прямоугольника. Опишите какое-нибудь преобразование этой фигуры, при котором ее образом является фигура, состоящая из всех точек сторон ромба.

17.26.° Известно, что при преобразовании фигуры F ее образом является сама фигура F. Можно ли утверждать, что это преобразование является тождественным?

17.27.° Даны точки A (3; −2) и B (5; −4). При параллельном переносе отрезка AB образом его середины является точка M_1 (−4; 3). Найдите образы точек A и B при таком параллельном переносе.

17.28.° Точки A (1; 3), B (2; 6), C (−3; 1) являются вершинами параллелограмма $ABCD$. При параллельном переносе параллелограмма $ABCD$ образом точки пересечения его диагоналей является точка O_1 (−2; −4). Найдите образы точек A, B, C и D при таком параллельном переносе.

17.29.° Найдите уравнение окружности, являющейся образом окружности $x^2+y^2=1$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (−3; 4).

17.30.° Найдите уравнение параболы, являющейся образом параболы $y=x^2$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (2; −3).

17.31.•• Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

17.32.•• Постройте трапецию по четырем сторонам.

17.33.•• Постройте отрезок, равный и параллельный данному отрезку AB, так, чтобы один его конец принадлежал данной прямой, а другой — данной окружности.

17.34.•• Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную данному отрезку AB.

17.35.* Постройте четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно непараллельны, по четырем углам и двум противолежащим сторонам.

17.36.* В каком месте надо построить мост MN через реку, разделяющую два населенных пункта A и B (рис. 17.17), чтобы путь $AMNB$ был кратчайшим (берега реки считаем параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам реки)?

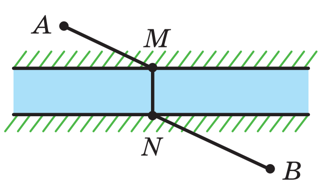


Рис. 17.17

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

17.37. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, параллельная противолежащей стороне. Чему равен периметр образовавшегося треугольника, если периметр данного треугольника равен 18 см?

17.38. Докажите, что четырехугольник с вершинами A (−3; −4), B (0; 3), C (7; 6) и D (4; −1) является ромбом, и найдите его площадь.

17.39. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бо́льшую из боковых сторон трапеции на отрезки 4 см и 25 см. Найдите площадь трапеции.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

17.40. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 м расположены 7 точек. Докажите, что среди них найдутся 2 точки, расстояние между которыми не более 1 м.

18. Осевая симметрия

Определение. **Точки A и A_1 называют симметричными относительно прямой l, если прямая l является серединным перпендикуляром отрезка AA_1** (рис. 18.1). **Если точка A принадлежит прямой l, то ее считают симметричной самой себе относительно прямой l.**

Например, точки A и A_1, у которых ординаты равны, а абсциссы — противоположные числа, симметричны относительно оси ординат (рис. 18.2).

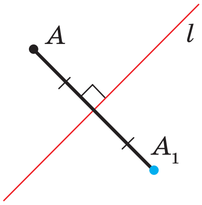


Рис. 18.1

Рассмотрим фигуру F и прямую l. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие симметричную ей относительно прямой l точку X_1. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 18.3). Такое преобразование фигуры F называют **осевой симметрией относительно прямой l**. Прямую l называют **осью симметрии**. Говорят, что фигуры F и F_1 **симметричны относительно прямой l**.

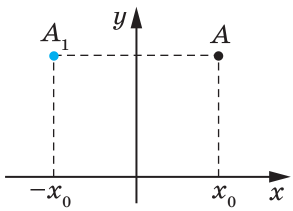


Рис. 18.2

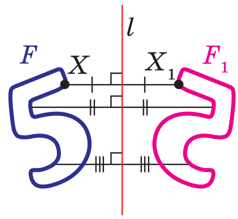


Рис. 18.3

Теорема 18.1 (свойство осевой симметрии). ***Осевая симметрия является движением.***

Доказательство. Выберем систему координат так, чтобы ось симметрии совпала с осью ординат. Пусть $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ — произвольные точки фигуры F. Тогда точки $A_1\ (-x_1;\ y_1)$ и $B_1\ (-x_2;\ y_2)$ — их соответствующие образы при осевой симметрии относительно оси ординат. Имеем:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Мы получили, что $AB = A_1B_1$, то есть осевая симметрия сохраняет расстояние между точками. Следовательно, осевая симметрия является движением. ◄

Следствие. ***Если фигуры F и F_1 симметричны относительно прямой, то $F = F_1$.***

Определение. Фигуру называют симметричной относительно прямой l, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно прямой l, также принадлежит этой фигуре.

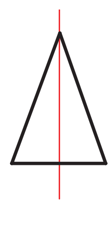


Рис. 18.4

Прямую l называют **осью симметрии фигуры.** Также говорят, что **фигура имеет ось симметрии.**

Приведем примеры фигур, имеющих ось симметрии.

На рисунке 18.4 изображен равнобедренный треугольник. Прямая, содержащая его высоту, проведенную к основанию, является осью симметрии треугольника.

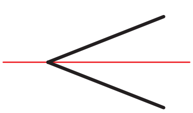


Рис. 18.5

Любой угол имеет ось симметрии — это прямая, содержащая его биссектрису (рис. 18.5).

Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии (рис. 18.6).

Две оси симметрии имеет отрезок: это его серединный перпендикуляр и прямая, содержащая этот отрезок (рис. 18.7).

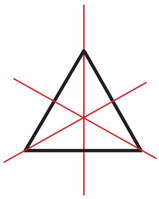


Рис. 18.6

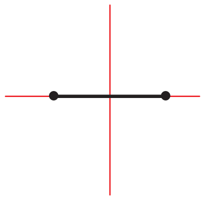


Рис. 18.7

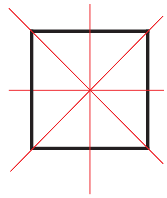


Рис. 18.8

Квадрат имеет четыре оси симметрии (рис. 18.8).

Существуют фигуры, имеющие бесконечно много осей симметрии, например окружность. Любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии (рис. 18.9).

Бесконечно много осей симметрии имеет и прямая: сама прямая и любая прямая, ей перпендикулярная, являются ее осями симметрии.

З а д а ч а 1. Начертили неравнобедренный треугольник ABC. Провели прямую l, содержащую биссектрису угла C. Потом рисунок стерли, оставив только точки A и B и прямую l. Восстановите треугольник ABC.

Р е ш е н и е. Поскольку прямая l является осью симметрии угла ACB, то точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой l — принадлежит лучу CB. Тогда пересечением прямых l и BA_1 является вершина C искомого треугольника ABC (рис. 18.10).

Эти соображения подсказывают, как построить искомый треугольник: строим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой l. Находим вершину C как точку пересечения прямых l и BA_1. ◀

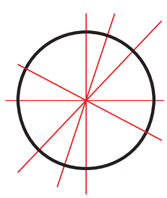


Рис. 18.9

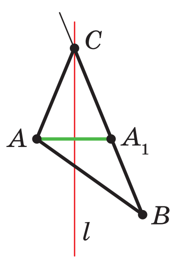


Рис. 18.10

Задача 2. Точка O принадлежит острому углу ABC (рис. 18.11). На сторонах BA и BC угла найдите такие точки E и F, чтобы периметр треугольника OEF был наименьшим.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 — образы точки O при симметриях относительно прямых BA и BC соответственно (рис. 18.12), а прямая O_1O_2 пересекает стороны BA и BC в точках E и F соответственно. Докажем, что точки E и F — искомые.

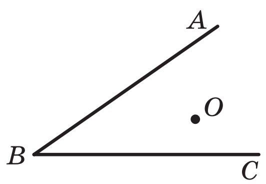


Рис. 18.11

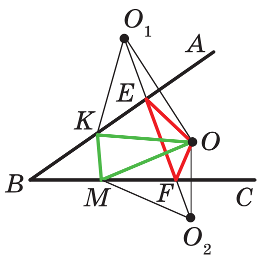


Рис. 18.12

Заметим, что отрезки EO_1 и EO симметричны относительно прямой BA. Следовательно, $EO_1 = EO$. Аналогично $FO = FO_2$. Тогда периметр треугольника OEF равен длине отрезка O_1O_2.

Покажем, что построенный треугольник имеет наименьший периметр из возможных.

Рассмотрим треугольник KOM, где K и M — произвольные точки соответственно лучей BA и BC, причем точка K не совпадает с точкой E или точка M не совпадает с точкой F.

Понятно, что $KO = KO_1$ и $MO = MO_2$.

Тогда периметр треугольника KOM равен сумме $O_1K + KM + MO_2$.

Однако $O_1K + KM + MO_2 \geqslant O_1O_2$. ◀

1. Какие точки называют симметричными относительно прямой l? Как называют прямую l?
2. Какие фигуры называют симметричными относительно прямой l?
3. Сформулируйте свойство осевой симметрии.
4. Каким свойством обладают фигуры, симметричные относительно прямой?
5. О какой фигуре говорят, что она имеет ось симметрии?
6. Приведите примеры фигур, имеющих ось симметрии.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

18.1.° Постройте образы фигур, изображенных на рисунке 18.13, при симметрии относительно прямой l.

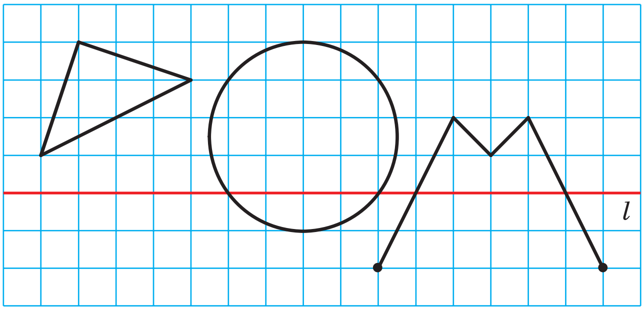


Рис. 18.13

18.2.° Начертите треугольник. Постройте треугольник, симметричный ему относительно прямой, содержащей одну из его средних линий.

18.3.° Точки A и B симметричны относительно прямой l (рис. 18.14). Постройте прямую l.

Рис. 18.14

18.4.• Проведите пересекающиеся прямые a и a_1. Постройте прямую, относительно которой прямая a_1 будет симметрична прямой a. Сколько решений имеет задача?

18.5.• Проведите параллельные прямые a и a_1. Постройте прямую, относительно которой прямая a_1 будет симметрична прямой a.

18.6.• Постройте ромб $ABCD$ по его вершинам B и C и прямой l, содержащей его диагональ BD (рис. 18.15).

18.7.• Постройте равнобедренный треугольник ABC по вершине A, точке K, принадлежащей боковой стороне BC, и прямой, содержащей высоту, проведенную к основанию AB (рис. 18.16).

18.8.• Посмотрите на рисунок 18.17 через стеклянную пробирку, наполненную водой. Почему некоторые буквы во втором слове оказались перевернутыми, а в первом — нет?

18.9.•• Окружности с центрами O_1 и O_2 имеют две общие точки (рис. 18.18). С помощью одного лишь циркуля постройте окружности, симметричные данным относительно прямой AB.

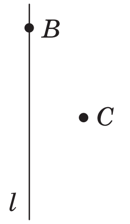


Рис. 18.15

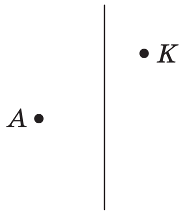


Рис. 18.16

СЕЗОН ДОЖДЕЙ

Рис. 18.17

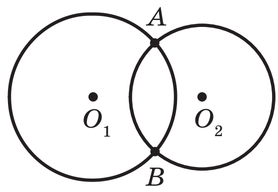


Рис. 18.18

УПРАЖНЕНИЯ

18.10.° Прямая l проходит через середину отрезка AB. Обязательно ли точки A и B являются симметричными относительно прямой l?

18.11.° Докажите, что прямая, содержащая медиану равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, является его осью симметрии.

18.12.° На рисунке 18.19 изображены равнобедренный треугольник ABC и прямая l, содержащая его высоту, проведенную к основанию AC. Отрезки AM и CN — медианы треугольника. Укажите образы точек A и B, медианы CN и стороны AC при симметрии относительно прямой l.

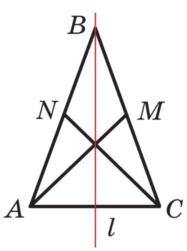


Рис. 18.19

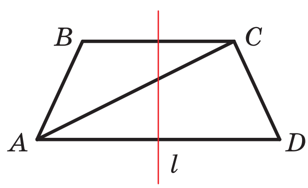


Рис. 18.20

18.13.° Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований равнобокой трапеции, является ее осью симметрии.

18.14.° На рисунке 18.20 изображены равнобокая трапеция $ABCD$ и прямая l, проходящая через середины ее оснований. Укажите образы точек B и D, диагонали AC и основания BC при симметрии относительно прямой l.

18.15.° Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

18.16.° Докажите, что прямые, проходящие через середины противолежащих сторон прямоугольника, являются его осями симметрии.

18.17.° Точки A_1 и B_1 являются соответственно образами точек A и B при осевой симметрии. Известно, что $AB = 5$ см. Найдите отрезок A_1B_1.

18.18.° Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

18.19.° Найдите координаты точек, симметричных точкам $A\ (-2;\ 1)$ и $B\ (0;\ -4)$ относительно осей координат.

18.20.° Точки $A\ (x;\ 3)$ и $B\ (-2;\ y)$ симметричны относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат. Найдите x и y.

18.21.• Образом прямой a при симметрии относительно прямой l является сама прямая a. Каково взаимное расположение прямых a и l?

18.22.• Докажите, что треугольник, имеющий ось симметрии, является равнобедренным.

18.23.• Докажите, что треугольник, имеющий две оси симметрии, является равносторонним. Может ли треугольник иметь ровно две оси симметрии?

18.24.• Докажите, что если параллелограмм имеет ровно две оси симметрии, то он является или прямоугольником, или ромбом.

18.25.• Докажите, что если четырехугольник имеет четыре оси симметрии, то он является квадратом.

18.26.• Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой O_1O_2.

18.27.• Точка M принадлежит прямому углу ABC (рис. 18.21). Точки M_1 и M_2 — образы точки M при симметрии относительно прямых BA и BC соответственно. Докажите, что точки M_1, B и M_2 лежат на одной прямой.

18.28.• Найдите координаты точек, симметричных точкам $A\ (-2;\ 0)$ и $B\ (3;\ -1)$ относительно прямой, содержащей биссектрисы:

1) первого и третьего координатных углов;

2) второго и четвертого координатных углов.

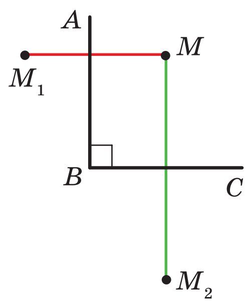


Рис. 18.21

18.29.° Точки $A\ (x;\ -1)$ и $B\ (y;\ 2)$ симметричны относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов. Найдите x и y.

18.30.•• Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a. На прямой a найдите такую точку X, чтобы прямая a содержала биссектрису угла AXB.

18.31.•• Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы лучи XA и XB образовывали с этой прямой равные углы.

18.32.•• Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы сумма $AX+XB$ была наименьшей.

18.33.* Постройте треугольник ABC по двум сторонам AB и AC ($AB<AC$) и разности углов B и C.

18.34.* Точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB (рис. 18.22). На прямой AB найдите такую точку X, что $\angle AXC=\frac{1}{2}\angle DXB$.

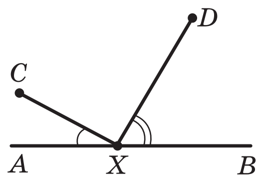


Рис. 18.22

18.35.* Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ не превышает $\frac{1}{2}(AB\cdot CD+BC\cdot AD)$.

18.36.* Дан треугольник ABC. Найдите точку, симметричный образ которой относительно любой стороны треугольника лежит на окружности, описанной около этого треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

18.37. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 48 см, $AD=7$ см. Какую сторону параллелограмма пересекает биссектриса угла B? Найдите отрезки, на которые биссектриса делит сторону параллелограмма.

18.38. Два треугольника имеют по две равные стороны, а сумма углов между соответственно равными сторонами этих треугольников составляет 180°. Докажите, что данные треугольники равновелики.

18.39. Даны точки $A\ (5;\ 2)$, $B\ (-7;\ 1)$ и $C\ (1;\ -5)$, отрезок AM — медиана треугольника ABC. Составьте уравнение прямой AM.

ПЕРВАЯ ВСЕУКРАИНСКАЯ ОЛИМПИАДА ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Надеемся, что задача 18.36 вам понравилась и вы ощутили радость успеха, решив ее. Эта задача заслуживает внимания еще и потому, что в 1961 году она была предложена участникам первой Всеукраинской олимпиады юных математиков.

Вообще, математические олимпиады в Украине имеют давнюю традицию. Первая городская олимпиада юных математиков состоялась в 1935 г. в Киеве. С тех пор прошло более 80 лет, и за это время математические олимпиады стали для многих талантливых школьников первым шагом на пути к научному творчеству. Сегодня такие имена, как А. В. Погорелов, С. Г. Крейн, М. А. Красносельский, В. Г. Дринфельд, известны всему научному миру. Все они в разные годы были победителями математических олимпиад в Украине.

С удовлетворением отмечаем, что и сейчас математические олимпиады в Украине очень популярны. Десятки тысяч школьников нашей страны на различных этапах участвуют в этих математических соревнованиях. К организации и проведению олимпиад привлекают лучших ученых, методистов, учителей. Именно благодаря их энтузиазму и профессионализму команда Украины достойно представляет нашу страну на международных математических олимпиадах.

Советуем и вам участвовать в математических олимпиадах. Ниже мы приводим некоторые задачи первой Всеукраинской олимпиады юных математиков. Испытайте свои силы.

1. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках K, L, M. Пусть точки O_1, O_2, O_3 являются центрами окружностей, вневписанных в этот же треугольник. Доказать, что треугольники KLM и $O_1O_2O_3$ подобны.
2. Внутри прямоугольника, площадь которого 4 м^2, расположены 7 прямоугольников, причем площадь каждого из них равна 1 м^2. Доказать, что по крайней мере два прямоугольника имеют общую часть, площадь которой не менее $\frac{1}{7}$ м^2.
3. Пусть стороны четырехугольника соответственно равны a, b, c, d, а его площадь равна S. Доказать, что $S \leqslant \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

Алексей Васильевич Погорелов
(1919–2002)

Селим Григорьевич Крейн
(1917–1999)

Марк Александрович Красносельский
(1920–1997)

Владимир Гершонович Дринфельд
(1954 г. р.)

19. Центральная симметрия. Поворот

Определение. **Точки A и A_1 называют симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AA_1** (рис. 19.1). **Точку O считают симметричной самой себе.**

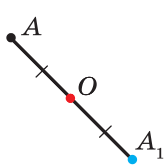


Рис. 19.1

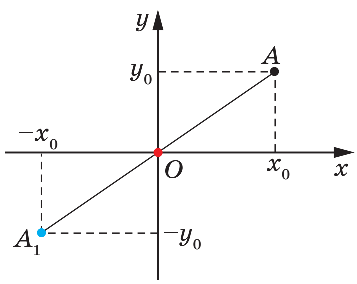


Рис. 19.2

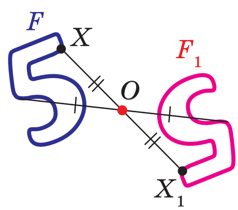


Рис. 19.3

Например, точки A и A_1, у которых как абсциссы, так и ординаты — противоположные числа, симметричны относительно начала координат (рис. 19.2).

Рассмотрим фигуру F и точку O. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие симметричную ей относительно точки O точку X_1. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 19.3). Такое преобразование фигуры F называют **центральной симметрией относительно точки** O. Точку O называют **центром симметрии**. Также говорят, что фигуры F и F_1 **симметричны относительно точки** O.

Теорема 19.1 (свойство центральной симметрии). ***Центральная симметрия является движением.***

Доказательство. Выберем систему координат так, чтобы центр симметрии совпал с началом координат. Пусть $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ — произвольные точки фигуры F. Точки $A_1\,(-x_1;\ -y_1)$ и $B_1\,(-x_2;\ -y_2)$ — соответственно их образы при центральной симметрии относительно начала координат. Имеем:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB.$$

Мы получили, что $AB = A_1B_1$, то есть центральная симметрия сохраняет расстояние между точками. Следовательно, центральная симметрия является движением. ◀

Следствие. ***Если фигуры F и F_1 симметричны относительно точки, то $F = F_1$.***

Определение. Фигуру называют симметричной относительно точки O, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно точки O, также принадлежит этой фигуре.

Точку O называют **центром симметрии фигуры.** Также говорят, что **фигура имеет центр симметрии.**

Приведем примеры фигур, имеющих центр симметрии.

Центром симметрии отрезка является его середина (рис. 19.4).

Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии (рис. 19.5).

Существуют фигуры, имеющие бесконечно много центров симметрии. Например, каждая точка прямой является ее центром симметрии.

Также бесконечно много центров симметрии имеет фигура, состоящая из двух параллельных прямых. Любая точка прямой, равноудаленной от двух данных, является центром симметрии рассматриваемой фигуры (рис. 19.6).

Рис. 19.4

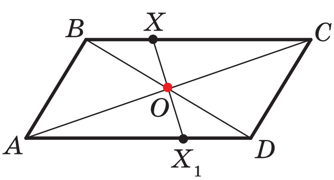


Рис. 19.5

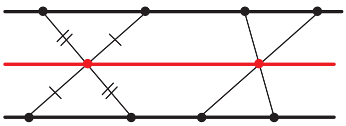


Рис. 19.6

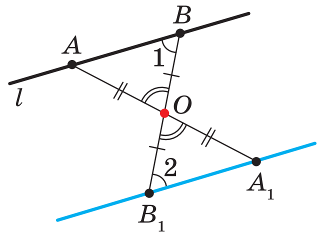


Рис. 19.7

Задача 1. Докажите, что образом данной прямой l при симметрии относительно точки O, не принадлежащей прямой l, является прямая, параллельная данной.

Решение. Поскольку центральная симметрия — это движение, то образом прямой l будет прямая. Для построения прямой достаточно найти две любые ее точки.

Выберем на прямой l произвольные точки A и B (рис. 19.7). Пусть точки A_1 и B_1 — их образы при центральной симметрии относительно точки O. Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой l.

Поскольку $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, углы AOB и A_1OB_1 равны как вертикальные, то треугольники AOB и A_1OB_1 равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 19.7). Следовательно, по признаку параллельных прямых $l \parallel A_1B_1$. ◀

Задача 2. Точка M принадлежит углу ABC (рис. 19.8). На сторонах BA и BC угла постройте такие точки E и F, чтобы точка M была серединой отрезка EF.

Решение. Пусть прямая A_1B_1 — образ прямой AB при центральной симметрии относительно точки M (рис. 19.9). Обозначим буквой F точку пересечения прямых A_1B_1 и BC.

Найдем прообраз точки F. Очевидно, что он лежит на прямой AB. Поэтому достаточно найти точку пересечения прямых FM и AB.

Обозначим эту точку буквой E. Тогда E и F — искомые точки. ◀

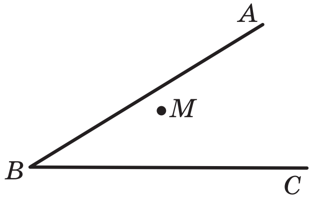


Рис. 19.8

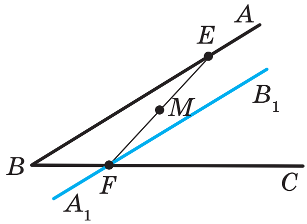


Рис. 19.9

Изучая окружающий мир, мы часто видим примеры проявления симметрии в природе (рис. 19.10). Объекты, имеющие ось или центр симметрии, легко воспринимаются и радуют взгляд. Недаром в Древней Греции слово «симметрия» служило синонимом слов «гармония», «красота».

Рис. 19.10

Идея симметрии широко используется в изобразительном искусстве, архитектуре и технике (рис. 19.11).

Рис. 19.11

На рисунке 19.12 изображены точки O, X, X_1 и X_2 такие, что $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$.

Говорят, что точка X_1 является образом точки X при **повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол α.**

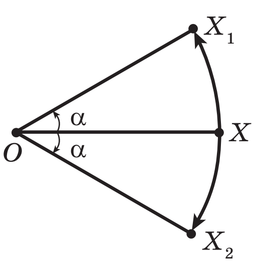


Рис. 19.12

Также говорят, что точка X_2 — это образ точки X при **повороте вокруг центра O по часовой стрелке на угол α.**

Точку O называют **центром поворота**, угол α — **углом поворота**.

Рассмотрим фигуру F, точку O и угол α. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол α (если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры F

получим фигуру F_1 (рис. 19.13). Такое преобразование фигуры F называют **поворотом вокруг центра O против часовой стрелки на угол** α. Точку O называют **центром поворота**.

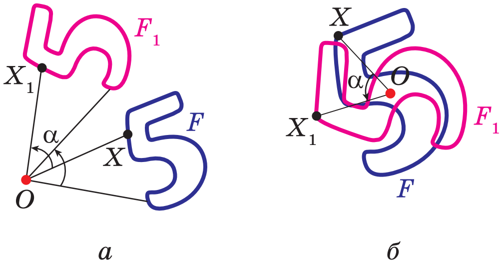


Рис. 19.13

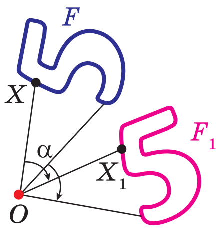


Рис. 19.14

Аналогично определяют преобразование поворота фигуры F по часовой стрелке на угол α (рис. 19.14).

Заметим, что центральная симметрия является поворотом вокруг центра симметрии на угол 180°.

Теорема 19.2 (свойство поворота). ***Поворот является движением.***

Докажите эту теорему самостоятельно.

Следствие. ***Если фигура F_1 — образ фигуры F при повороте, то $F = F_1$.***

Задача 3. Даны прямая a и точка O вне ее. Постройте образ прямой a при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 45°.

Решение. Поскольку поворот — это движение, то образом прямой a будет прямая. Для построения прямой достаточно найти две любые ее точки. Выберем на прямой a произвольные точки A и B (рис. 19.15). Построим точки A_1 и B_1 — их образы при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 45°. Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой a. ◀

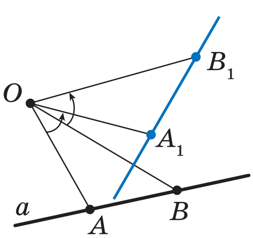


Рис. 19.15

Задача 4. Точка P принадлежит углу ABC, но не принадлежит его сторонам. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого является точкой P, а две другие принадлежат сторонам BA и BC угла ABC.

Решение. Пусть прямая A_1B_1 — образ прямой AB при повороте вокруг центра P против часовой стрелки на угол $60°$ (рис. 19.16). Обозначим буквой F точку пересечения прямых A_1B_1 и BC.

Пусть точка E — прообраз точки F при рассматриваемом повороте. Точка E принадлежит стороне BA угла ABC.

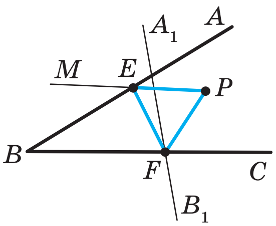


Рис. 19.16

Эти соображения подсказывают, как построить искомый треугольник.

Строим прямую A_1B_1 как образ прямой AB при повороте вокруг центра P против часовой стрелки на угол $60°$. Пусть F — точка пересечения прямых A_1B_1 и BC.

Строим угол MPF, равный $60°$. Пусть прямые MP и AB пересекаются в точке E. Эта точка и является прообразом точки F.

Имеем: $PF = PE$ и $\angle FPE = 60°$. Следовательно, треугольник EPF равносторонний. ◀

1. Какие точки называют симметричными относительно точки O? Как называют точку O?
2. Какие фигуры называют симметричными относительно точки O?
3. Сформулируйте свойство центральной симметрии.
4. Каким свойством обладают фигуры, симметричные относительно точки?
5. О какой фигуре говорят, что она имеет центр симметрии?
6. Приведите примеры фигур, имеющих центр симметрии.
7. Опишите преобразование поворота вокруг точки.
8. Сформулируйте свойство поворота.
9. Каким свойством обладают фигуры, если одна из них является образом другой при повороте?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

19.1.° Начертите треугольник ABC и отметьте точку O, не принадлежащую ему. Постройте треугольник, симметричный данному относительно точки O.

19.2.° Начертите треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный данному относительно середины стороны AB.

19.3.° Начертите окружность и отметьте на ней точку. Постройте окружность, симметричную данной относительно отмеченной точки.

19.4.° Постройте образ отрезка AB при повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол 45° (рис. 19.17).

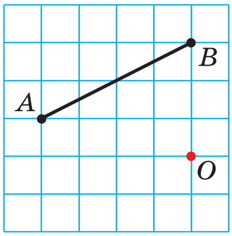


Рис. 19.17

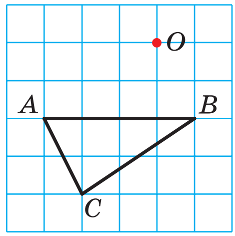


Рис. 19.18

19.5.° Постройте образ треугольника ABC при повороте вокруг центра O по часовой стрелке на угол 90° (рис. 19.18).

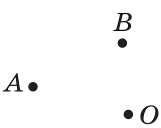


Рис. 19.19

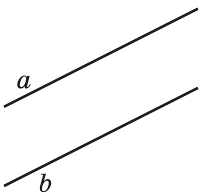


Рис. 19.20

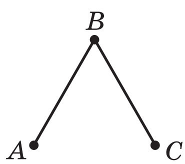


Рис. 19.21

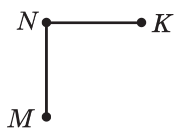


Рис. 19.22

19.6.• Постройте параллелограмм $ABCD$ по его вершинам A и B и точке O пересечения его диагоналей (рис. 19.19).

19.7.• Даны две параллельные прямые a и b (рис. 19.20). Найдите точку, относительно которой прямая a будет симметрична прямой b.

19.8.• На рисунке 19.21 изображены два равных отрезка AB и BC, причем $\angle ABC = 60°$. Найдите точку O такую, чтобы отрезок AB был образом отрезка BC при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 120°.

19.9.• На рисунке 19.22 изображены два равных перпендикулярных отрезка MN и NK. Найдите точку O такую, чтобы отрезок NK был образом отрезка MN при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 90°.

19.10.* Постройте фигуру, которая не имеет осей симметрии и образом которой является сама эта фигура при повороте вокруг некоторой точки:
1) на угол $90°$; 2) на угол $120°$.

УПРАЖНЕНИЯ

19.11.° Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 19.23). Точка M — середина стороны BC. Укажите образы точек A, D и M, стороны CD, диагонали BD при симметрии относительно точки O.

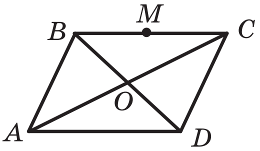


Рис. 19.23

19.12.° Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

19.13.° Докажите, что окружность имеет центр симметрии.

19.14.° Точки A_1 и B_1 являются образами соответственно точек A и B при симметрии относительно точки, не принадлежащей прямой AB. Докажите, что четырехугольник ABA_1B_1 — параллелограмм.

19.15.° Найдите координаты точек, симметричных точкам A $(3; -1)$ и B $(0; -2)$ относительно:
1) начала координат; 2) точки $M\,(2; -3)$.

19.16.° Докажите, что образом прямой, проходящей через центр симметрии, является сама эта прямая.

19.17.° Точки A $(x; -2)$ и B $(1; y)$ симметричны относительно:
1) начала координат; 2) точки $M\,(-1; 3)$.
Найдите x и y.

19.18.° На рисунке 19.24 изображены фигуры, составленные из равных полукругов. Какие из этих фигур при некотором повороте вокруг точки O на угол α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, совпадают со своими образами?

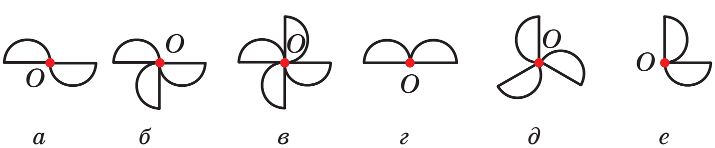


Рис. 19.24

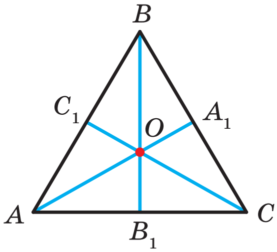


Рис. 19.25

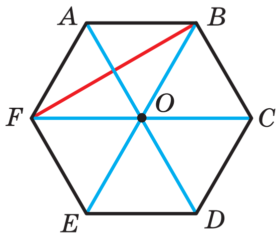


Рис. 19.26

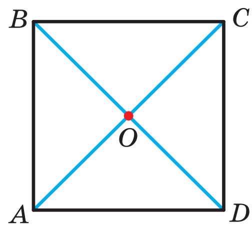


Рис. 19.27

19.19.° Медианы равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 19.25). Укажите образы точек C, C_1 и O, стороны BC, медианы BB_1, отрезка OC_1, треугольника $A_1B_1C_1$ при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол $120°$.

19.20.° Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 19.26). Укажите образы стороны AF, диагонали BF, диагонали AD, шестиугольника $ABCDEF$ при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол:

1) $60°$; 2) $120°$.

19.21.° Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 19.27). Укажите образы точек A, O и C, стороны AD, диагонали BD при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол $90°$.

19.22.• Докажите, что треугольник не имеет центра симметрии.

19.23.• Докажите, что луч не имеет центра симметрии.

19.24.• Докажите, что если четырехугольник имеет центр симметрии, то он является параллелограммом.

19.25.• Окружности с центрами O_1 и O_2 симметричны относительно точки O (рис. 19.28). Прямая, проходящая через центр симметрии, пересекает первую окружность в точках A_1 и B_1, а вторую — в точках A_2 и B_2. Докажите, что $A_1B_1 = A_2B_2$.

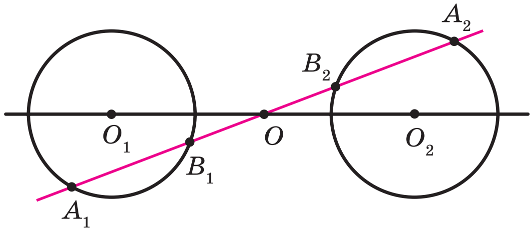


Рис. 19.28

19.26.• Вершина A равностороннего треугольника ABC является центром поворота на угол $120°$. Найдите отрезок BC_1, где точка C_1 — образ точки C при данном повороте, если $AB = 1$ см. Сколько решений имеет задача?

19.27.• Вершина A квадрата $ABCD$ является центром поворота против часовой стрелки на угол $90°$. Найдите отрезок CC_1, где точка C_1 — образ точки C при данном повороте, если $AB = 1$ см.

19.28.•• Вершины одного параллелограмма лежат на сторонах другого: по одной вершине на каждой стороне. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.

19.29.•• Точки A и C принадлежат острому углу, но не лежат на его сторонах. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы точки B и D лежали на сторонах угла.

19.30.•• Постройте отрезок, серединой которого является данная точка, а концы принадлежат данным непараллельным прямым.

19.31.•• Точка M принадлежит углу ABC и не принадлежит его сторонам. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, вершина прямого угла которого является точкой M, а две другие принадлежат сторонам BA и BC соответственно.

19.32.* На стороне BC равностороннего треугольника ABC отметили точку D. Вне треугольника ABC отметили точку E такую, что треугольник DEC равносторонний (рис. 19.29). Докажите, что точка C и середины M и K отрезков BE и AD соответственно являются вершинами равностороннего треугольника.

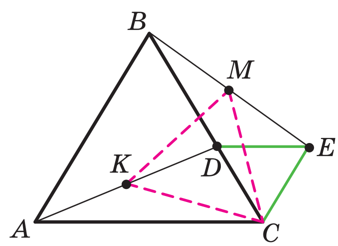


Рис. 19.29

19.33.* Постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины принадлежали трем данным параллельным прямым.

19.34.* Постройте ромб, точкой пересечения диагоналей которого является данная точка, а три вершины принадлежат трем данным попарно непараллельным прямым.

19.35.* На стороне CD квадрата $ABCD$ отметили точку E. Биссектриса угла BAE пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что $AE = BF + ED$.

19.36.* В равностороннем треугольнике ABC выбрали точку P так, что $\angle APB = 150°$. Докажите, что существует прямоугольный треугольник, стороны которого равны отрезкам PA, PB и PC.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

19.37. Найдите стороны треугольника ABC, если $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, а высота, проведенная из вершины C, равна 4 см.

19.38. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек A (−2; 4) и B (6; 8).

19.39. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону треугольника в отношении 25 : 12, считая от вершины равнобедренного треугольника. Найдите радиус вписанной окружности, если площадь треугольника равна 1680 см^2.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

19.40. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы любые 3 из них являлись вершинами равнобедренного треугольника.

20. Подобие фигур[1]

На рисунке 20.1 изображены точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$. Говорят, что точка X_1 — это образ точки X при **гомотетии с центром** O **и коэффициентом** 2.

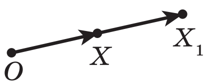


Рис. 20.1

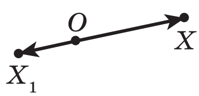


Рис. 20.2

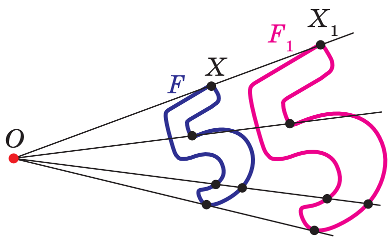
На рисунке 20.2 изображены точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$. Говорят, что точка X_1 — это образ точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом $-\frac{1}{2}$.

Вообще, если точки O, X и X_1 таковы, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$, то говорят, что точка X_1 — это образ точки X при **гомотетии с центром** O **и коэффициентом** k.

[1] Материал пункта, относящийся к гомотетии, не обязателен для изучения.

Точку O называют **центром гомотетии**, число k — **коэффициентом гомотетии**, $k \neq 0$.

Рассмотрим фигуру F и точку O. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k (если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 20.3). Такое преобразование фигуры F называют **гомотетией с центром O и коэффициентом k**. Также говорят, что фигура F_1 **гомотетична** фигуре F с центром O и коэффициентом k.



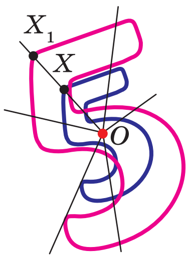


Рис. 20.3

Например, на рисунке 20.4 треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с центром O и коэффициентом, равным -3. Также можно сказать, что треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с тем же центром, но коэффициентом гомотетии, равным $-\frac{1}{3}$.

Отметим, что при $k=-1$ гомотетия с центром O является центральной симметрией с центром O (рис. 20.5). Если $k=1$, то гомотетия является тождественным преобразованием.

Очевидно, что при $k \neq 1$ и $k \neq -1$ гомотетия не является движением.

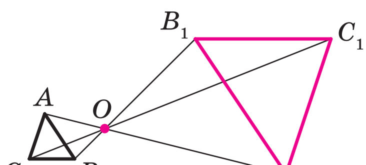


Рис. 20.4

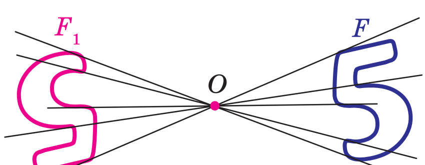


Рис. 20.5

Теорема 20.1. ***При гомотетии фигуры F с коэффициентом k все расстояния между ее точками изменяются в $|k|$ раз, то есть если A и B — произвольные точки фигуры F, а точки A_1 и B_1 — их соответствующие образы при гомотетии с коэффициентом k, то $A_1B_1 = |k|AB$.***

Доказательство. Пусть точка O — центр гомотетии. Тогда $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$. Имеем: $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\overrightarrow{AB}$, то есть $A_1B_1 = |k|AB$. ◄

Следствие. ***Если треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии k, то $\Delta A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \Delta ABC$.***

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться теоремой 20.1 и третьим признаком подобия треугольников.

Гомотетия обладает целым рядом других свойств.

При гомотетии:

- *образом прямой является прямая;*
- *образом отрезка является отрезок;*
- *образом угла является угол, равный данному;*
- *образом треугольника является треугольник, подобный данному;*
- *образом окружности является окружность;*
- *площадь многоугольника изменяется в k^2 раз, где k — коэффициент гомотетии.*

Эти свойства вы можете доказать на занятиях математического кружка.

Перечисленные свойства гомотетии указывают на то, что это преобразование может изменить размеры фигуры, но не меняет ее форму, то есть при гомотетии образ и прообраз являются подобными фигурами. Заметим, что в курсе геометрии 8 класса, говоря о подобии фигур, мы давали определение только подобных треугольников. Сейчас определим понятие подобия для произвольных фигур.

На рисунке 20.6 фигура F_1 гомотетична фигуре F, а фигура F_2 симметрична фигуре F_1 относительно прямой l.

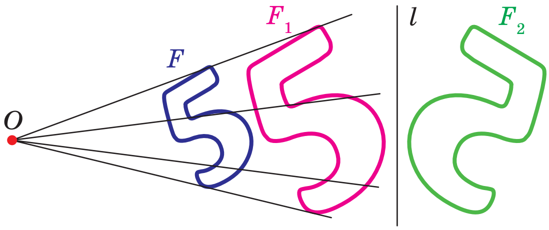


Рис. 20.6

Говорят, что фигура F_2 получена из фигуры F в результате **композиции** двух преобразований: гомотетии и осевой симметрии.

Поскольку $F_1 = F_2$, то фигуры F и F_2 имеют одинаковые формы, но разные размеры, то есть они подобны. Говорят, что фигура F_2 получена из фигуры F в результате **преобразования подобия**.

На рисунке 20.7 фигура F_1 гомотетична фигуре F, а фигура F_2 — образ фигуры F_1 при некотором движении. Здесь также можно утверждать, что фигуры F и F_2 подобны.

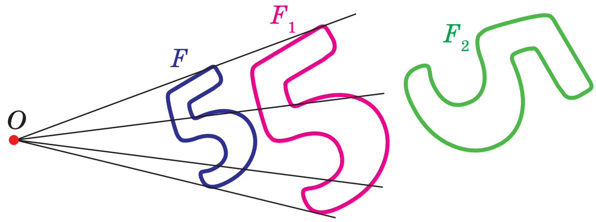


Рис. 20.7

Из сказанного следует, что целесообразно принять такое определение.

Определение. Две фигуры называют подобными, если одну из них можно получить из другой в результате композиции двух преобразований: гомотетии и движения.

Это определение иллюстрирует схема, изображенная на рисунке 20.8.

Рис. 20.8

Запись $F \sim F_1$ означает, что фигуры F и F_1 подобны. Также говорят, что фигура F_1 — образ фигуры F при **преобразовании подобия**.

Из приведенного определения следует, что *при преобразовании подобия фигуры F расстояния между ее точками изменяются в одно и то же количество раз*.

Так как тождественное преобразование является движением, то из схемы, изображенной на рисунке 20.8, следует, что гомотетия — частный случай преобразования подобия.

Пусть A и B — произвольные точки фигуры F, а точки A_1 и B_1 — их образы при преобразовании подобия. Точки A_1 и B_1 принадлежат фигуре F_1, которая подобна фигуре F. Число $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ называют

коэффициентом подобия. Говорят, что фигура F_1 подобна фигуре F с коэффициентом подобия k, а фигура F подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$.

Заметим, что преобразование подобия с коэффициентом $k=1$ является движением. Отсюда следует, что движение — частный случай преобразования подобия.

С преобразованием подобия мы часто встречаемся в повседневной жизни (рис. 20.9). Например, в результате изменения масштаба карты получаем карту, подобную данной. Фотография — это преобразование негатива в подобное изображение на фотобумаге. Перенося в свою тетрадь рисунок, сделанный учителем на доске, вы также выполняете преобразование подобия.

Рис. 20.9

Теорема 20.2. ***Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.***

Доказательство этой теоремы выходит за рамки рассматриваемого курса геометрии. Мы докажем ее для частного случая, рассмотрев подобные треугольники.

Доказательство. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ — образ треугольника ABC при преобразовании подобия с коэффициентом k (рис. 20.10). Сторона A_1C_1 — образ стороны AC. Тогда $A_1C_1 = k \cdot AC$. Проведем высоту BD. Пусть точка D_1 — образ точки D.

Поскольку при преобразовании подобия сохраняются углы, то отрезок B_1D_1 — высота треугольника $A_1B_1C_1$.

Тогда $B_1D_1 = k \cdot BD$. Имеем:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{k \cdot AC \cdot k \cdot BD}{AC \cdot BD} = k^2.$$ ◄

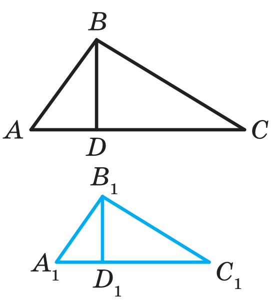


Рис. 20.10

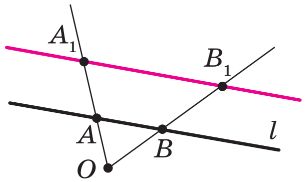


Рис. 20.11

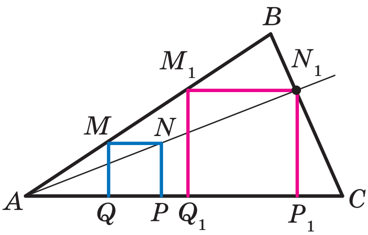


Рис. 20.12

Задача 1. Докажите, что образом прямой l при гомотетии с центром O, не принадлежащим прямой l, является прямая, параллельная данной.

Решение. Из свойств гомотетии следует, что образом прямой l будет прямая. Для построения прямой достаточно найти две любые ее точки. Выберем на прямой l произвольные точки A и B (рис. 20.11). Пусть точки A_1 и B_1 — их образы при гомотетии с центром O и коэффициентом k (рисунок 20.11 соответствует случаю, когда $k>1$). Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой AB.

При доказательстве теоремы 20.1 мы показали, что $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. Следовательно, $AB \parallel A_1B_1$. ◀

Задача 2. В остроугольный треугольник ABC впишите квадрат так, чтобы две его вершины лежали соответственно на сторонах AB и BC, а две другие — на стороне AC.

Решение. Из произвольной точки M стороны AB опустим перпендикуляр MQ на сторону AC (рис. 20.12). Построим квадрат $MQPN$ так, чтобы точка P лежала на луче QC. Пусть луч AN пересекает сторону BC в точке N_1.

Рассмотрим гомотетию с центром A и коэффициентом $k = \dfrac{AN_1}{AN}$. Тогда точка N_1 — образ точки N при этой гомотетии. Образом отрезка MN является отрезок M_1N_1, где точка M_1 принадлежит лучу AB, причем $M_1N_1 \parallel MN$. Аналогично отрезок N_1P_1 такой, что точка P_1 принадлежит лучу AC и $N_1P_1 \parallel NP$, является образом отрезка NP. Следовательно, отрезки M_1N_1 и N_1P_1 — соседние стороны искомого квадрата. Для завершения построения осталось опустить перпендикуляр M_1Q_1 на сторону AC. ◀

Задача 3. Отрезок CD — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Найдите радиус r вписанной окружности треугольника ABC, если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, соответственно равны r_1 и r_2.

Решение. Поскольку угол A — общий для прямоугольных треугольников ACD и ABC, то эти треугольники подобны (рис. 20.13). Пусть коэффициент подобия равен k_1. Очевидно, что $k_1 = \frac{r_1}{r}$. Аналогично $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $k_2 = \frac{r_2}{r}$.

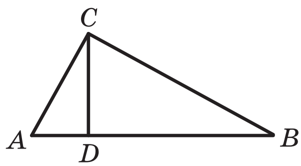


Рис. 20.13

Обозначим площади треугольников ACD, BCD и ABC соответственно S_1, S_2 и S. Имеем:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

Отсюда

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{S_1 + S_2}{S} = 1.$$

Получаем, что $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, то есть $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Ответ: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. ◄

1. В каком случае говорят, что точка X_1 является образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k?
2. Опишите преобразование фигуры F, которое называют гомотетией с центром O и коэффициентом k.
3. Как изменяется расстояние между точками при гомотетии с коэффициентом k?
4. Сформулируйте свойства гомотетии.
5. Какие фигуры называют подобными?
6. Чему равно отношение площадей подобных многоугольников?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

20.1.° Постройте образ отрезка AB (рис. 20.14) при гомотетии с центром O и коэффициентом:

1) $k = 2$;

2) $k = -\frac{1}{2}$.

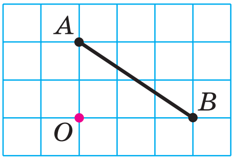


Рис. 20.14

20.2.° Начертите отрезок AB. Постройте образ этого отрезка при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке A, $k=3$;
2) в точке B, $k=-2$;
3) в середине отрезка AB, $k=2$.

20.3.° Начертите окружность, радиус которой равен 2 см, и отметьте на ней точку A. Постройте образ этой окружности при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в центре окружности, $k=-\frac{1}{2}$, $k=2$;
2) в точке A, $k=2$, $k=-\frac{1}{2}$.

20.4.° Начертите треугольник ABC. Постройте образ этого треугольника при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке B, $k=3$;
2) в точке C, $k=-\frac{1}{2}$;
3) в точке A, $k=\frac{1}{2}$;
4) в середине стороны AB, $k=\frac{1}{2}$;
5) в середине стороны AC, $k=-\frac{1}{3}$.

20.5.° Начертите треугольник ABC. Найдите точку пересечения его медиан. Постройте образ этого треугольника при гомотетии с центром в точке пересечения его медиан и коэффициентом:

1) $k=2$;
2) $k=\frac{1}{2}$;
3) $k=-\frac{1}{2}$.

20.6.° Начертите параллелограмм $ABCD$. Точку пересечения его диагоналей обозначьте буквой O. Постройте образ этого параллелограмма при гомотетии с центром O и коэффициентом:

1) $k=2$;
2) $k=-2$.

20.7.° Начертите квадрат $ABCD$. Постройте образ этого квадрата при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке A, $k=\frac{1}{3}$;
2) в точке B, $k=-2$;
3) в точке C, $k=2$.

20.8.° Ориентируясь по клеткам, начертите пятиугольник $ABCDE$ (рис. 20.15). Постройте пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобный данному с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

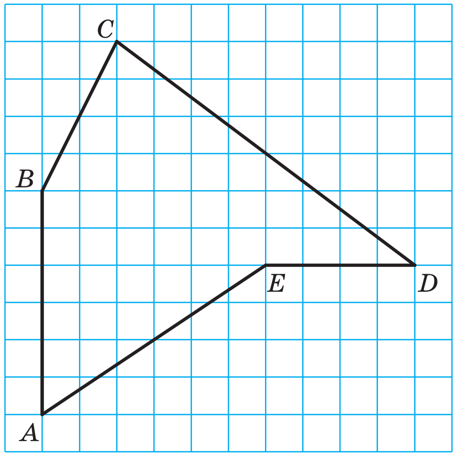


Рис. 20.15

20.9.• На рисунке 20.16 точка A_1 — образ точки A при гомотетии с центром O. Постройте образ точки B при этой гомотетии.

Рис. 20.16

20.10.• На рисунке 20.17 точка A_1 — образ точки A при гомотетии с коэффициентом: 1) $k=3$; 2) $k=-2$. Постройте центр гомотетии.

Рис. 20.17

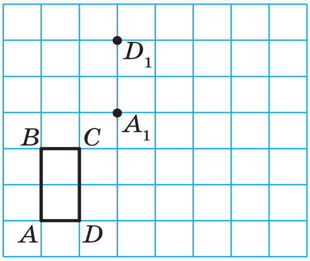


Рис. 20.18

20.11.• На рисунке 20.18 изображены прямоугольник $ABCD$ и точки A_1 и D_1, которые являются образами соответственно точек A и D при преобразовании подобия. Постройте образ прямоугольника $ABCD$ при этом преобразовании. Сколько решений имеет задача?

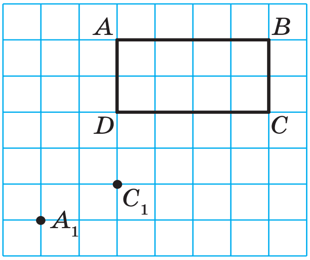


Рис. 20.19

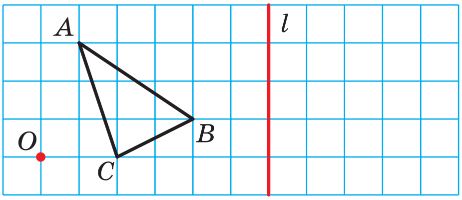


Рис. 20.20

20.12.• На рисунке 20.19 изображены прямоугольник $ABCD$ и точки A_1 и C_1, являющиеся образами соответственно точек A и C при преобразовании подобия. Постройте образ прямоугольника $ABCD$ при этом преобразовании. Сколько решений имеет задача?

20.13.• Постройте образ треугольника ABC при преобразовании подобия, которое является композицией двух преобразований: гомотетии с центром O и коэффициентом $k=2$ и осевой симметрии относительно прямой l (рис. 20.20). Укажите коэффициент подобия.

20.14.• Начертите окружность, радиус которой равен 2 см. Отметьте точку O на расстоянии 4 см от ее центра. Постройте образ этой окружности при преобразовании подобия, которое является композицией двух преобразований: гомотетии с центром O и коэффициентом $k=\frac{1}{2}$ и поворота с центром O по часовой стрелке на угол 45°. Укажите коэффициент подобия.

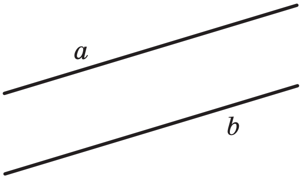


Рис. 20.21

20.15.• На рисунке 20.21 изображены две параллельные прямые a и b. Постройте центр гомотетии, при которой прямая b является образом прямой a с коэффициентом:

1) $k=2$; 2) $k=\frac{1}{2}$; 3) $k=-\frac{1}{2}$.

Сколько решений имеет задача?

20.16.• Начертите трапецию $ABCD$, основание BC которой в два раза меньше основания AD. Постройте центр гомотетии, при которой отрезок AD является образом отрезка BC с коэффициентом:
1) $k=2$; 2) $k=-2$.

УПРАЖНЕНИЯ

20.17.° В параллелограмме $ABCD$ точка D_1 — середина стороны AD. При гомотетии с центром A точка D_1 является образом точки D. Найдите коэффициент гомотетии. Укажите, какие точки являются образами точек B и C при этой гомотетии.

20.18.° Какие из фигур, изображенных на рисунке 20.22, совпадают со своими образами при гомотетии с центром O и коэффициентом $k > 0$ и $k \neq 1$?

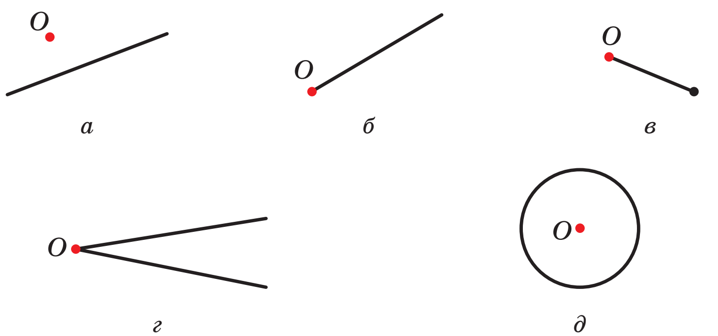


Рис. 20.22

20.19.° Какие из фигур, изображенных на рисунке 20.23, совпадают со своими образами при гомотетии с центром O и коэффициентом $k < 0$?

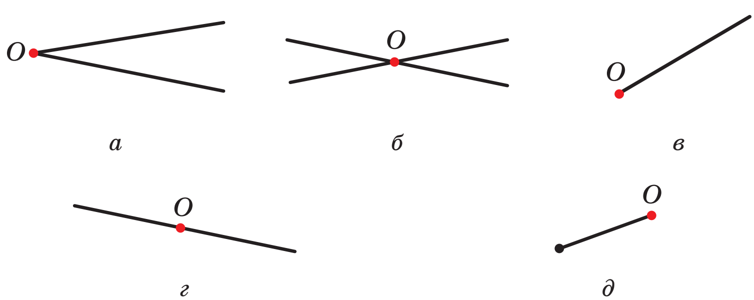


Рис. 20.23

20.20.° Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 20.24). Найдите коэффициент гомотетии с центром:

1) в точке B, при которой точка B_1 является образом точки M;
2) в точке M, при которой точка A_1 является образом точки A;
3) в точке C, при которой точка M является образом точки C_1.

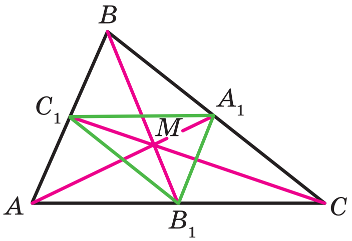


Рис. 20.24

20.21.° Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 20.24). Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой треугольник $A_1B_1C_1$ является образом треугольника ABC.

20.22.° В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Точки K, F и N — середины отрезков AM, BM и CM соответственно. Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой треугольник ABC является образом треугольника KFN.

20.23.° Найдите образы точек A $(-2;\ 1)$, B $(3;\ 0)$ и D $(0;\ -6)$ при гомотетии с центром O $(0;\ 0)$ и коэффициентом:

1) $k=2$; 2) $k=3$; 3) $k=-\frac{1}{2}$; 4) $k=-\frac{1}{3}$.

20.24.° Точка A_1 $(-1;\ 2)$ — образ точки $A(-3;\ 6)$ при гомотетии с центром в начале координат. Найдите коэффициент гомотетии.

20.25.° Площади двух подобных треугольников равны 28 см^2 и 63 см^2. Одна из сторон первого треугольника равна 8 см. Найдите сторону второго треугольника, соответственную данной стороне первого.

20.26.° Соответственные стороны двух подобных треугольников равны 30 см и 24 см. Площадь треугольника со стороной 30 см равна 45 см^2. Найдите площадь другого треугольника.

20.27.° Площадь треугольника равна S. Чему равна площадь треугольника, который отсекает от данного его средняя линия?

20.28.° Площадь треугольника равна S. Найдите площадь треугольника, вершины которого — середины средних линий данного треугольника.

20.29.• Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 20.25). Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой:

1) отрезок AC является образом отрезка MN;
2) отрезок MN является образом отрезка AC.

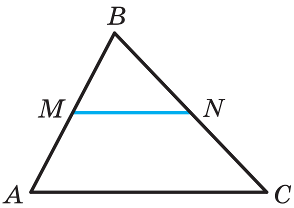


Рис. 20.25

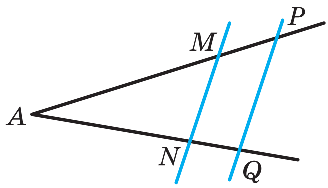


Рис. 20.26

20.30.• Параллельные прямые пересекают стороны угла A в точках M, N, P и Q (рис. 20.26). Известно, что $AM : MP = 3 : 1$. Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой:
1) отрезок PQ является образом отрезка MN;
2) отрезок MN является образом отрезка PQ.

20.31.• Параллельные отрезки BC и AD таковы, что $AD = 3BC$. Сколько существует точек, являющихся центрами гомотетии, при которой образом отрезка BC является отрезок AD? Для каждой такой точки определите коэффициент гомотетии.

20.32.• Окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R и r соответственно касаются внешним образом в точке O (рис. 20.27). Докажите, что окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $-\frac{R}{r}$.

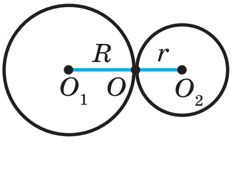


Рис. 20.27

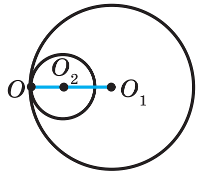


Рис. 20.28

20.33.• Окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R и r соответственно касаются внутренним образом в точке O (рис. 20.28). Докажите, что окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{R}{r}$.

20.34.• Окружность с центром O касается прямой a. Докажите, что образ этой окружности при гомотетии с центром A, где A — произвольная точка прямой a (рис. 20.29), касается этой прямой.

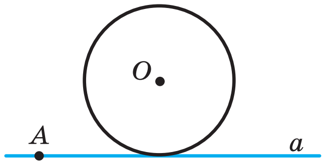


Рис. 20.29

20.35.• Точка A (2; −3) — образ точки B (8; 6) при гомотетии с центром M (4; 0). Найдите коэффициент гомотетии.

20.36.• Точка A (−7; 10) — образ точки B (−1; −2) при гомотетии с коэффициентом −2. Найдите центр гомотетии.

20.37.• Точка A_1 (x; 4) — образ точки A (−6; y) при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом:

1) $k=\frac{1}{2}$; 2) $k=-2$.

Найдите x и y.

20.38.• Точка A_1 (4; y) — образ точки A (x; −4) при гомотетии с центром B (1; −1) и коэффициентом $k=-3$. Найдите x и y.

20.39.• Средняя линия треугольника отсекает от него трапецию, площадь которой равна 21 см². Найдите площадь данного треугольника.

20.40.• Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $BM=4$ см, $AC=8$ см, $AM=MK$, а площадь треугольника MBK равна 5 см².

20.41.• Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если $BC : AD=3 : 5$, а площадь треугольника AED равна 175 см².

20.42.• На рисунке 20.30 изображен план школы. Вычислите, какую площадь занимает школа, если план начерчен в масштабе 1 : 2000. Длина стороны клетки равна 0,5 см.

20.43.•• Найдите образ прямой $y=2x+1$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом:

1) $k=2$; 2) $k=-\frac{1}{2}$.

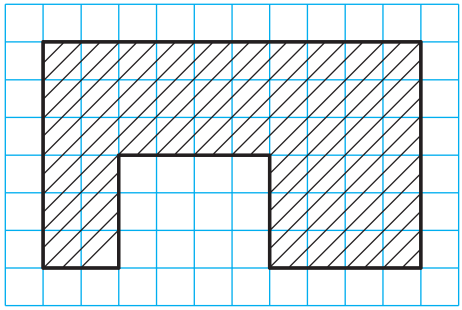


Рис. 20.30

20.44.•• Найдите образ окружности $(x+2)^2+(y-4)^2=4$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом:

1) $k=\frac{1}{2}$; 2) $k=-2$.

20.45.•• Две окружности касаются внутренним образом. Через точку касания проведены две прямые, пересекающие окружности в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 20.31). Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

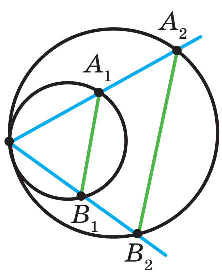


Рис. 20.31

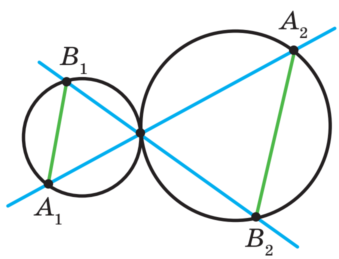


Рис. 20.32

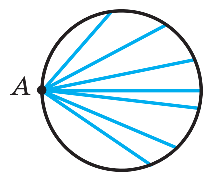


Рис. 20.33

20.46.•• Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведены две прямые, пересекающие окружности в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 20.32). Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

20.47.•• Точка A принадлежит окружности (рис. 20.33). Найдите геометрическое место точек, являющихся серединами хорд данной окружности, одним из концов которых является точка A.

20.48.•• Две окружности касаются внутренним образом, причем меньшая окружность проходит через центр большей. Докажите, что меньшая окружность делит пополам любую хорду большей окружности, проходящую через точку касания.

20.49.•• Даны треугольник ABC и произвольная точка M. Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон треугольника ABC, являются вершинами треугольника, равного данному.

20.50.•• Постройте треугольник по двум его углам и радиусу описанной окружности.

20.51.•• Постройте треугольник по двум его углам и радиусу вписанной окружности.

20.52.•• Отрезок AC — наибольшая сторона треугольника ABC. Впишите в треугольник ABC прямоугольник, стороны которого относятся как $2 : 1$, так, чтобы две вершины большей стороны прямоугольника лежали на стороне AC треугольника, а две другие вершины — на сторонах AB и BC.

20.53.* Отрезок AB — хорда данной окружности, точка C — произвольная точка этой окружности. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольников ABC.

20.54.* Даны две точки A и B и прямая l. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольников ABC, где C — произвольная точка прямой l.

20.55.* Точка M принадлежит углу ABC, но не принадлежит его сторонам. Постройте окружность, которая касается сторон угла и проходит через точку M.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

20.56. Найдите площадь ромба и радиус окружности, вписанной в ромб, если его диагонали равны 12 см и 16 см.

20.57. Найдите периметр треугольника, образованного при пересечении прямой $3x+4y=24$ с осями координат.

20.58. Две окружности касаются внешним образом в точке A, точки B и C — точки касания с этими окружностями их общей касательной. Докажите, что угол BAC прямой.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФИГУР ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Преобразование фигур — эффективный метод решения целого ряда геометрических задач. Проиллюстрируем это на примерах.

Задача 1. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC постройте такие точки M, N и P соответственно, чтобы периметр треугольника MNP был наименьшим.

Решение. Пусть P — произвольная точка стороны AC треугольника ABC, точки P_1 и P_2 — ее образы при симметрии относительно прямых AB и BC соответственно (рис. 20.34). Прямая P_1P_2 пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и N. Из решения задачи 2 п. 18 следует, что из периметров всех треугольников, для которых точка P фиксирована, а точки M и N принадлежат сторонам AB и BC, периметр треугольника MNP является наименьшим. Этот периметр равен длине отрезка P_1P_2.

Заметим, что отрезок EF — средняя линия треугольника PP_1P_2. Тогда $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Поскольку $\angle BEP + \angle BFP = 180°$, то точки P, E, B и F лежат на одной окружности с диаметром BP. Отсюда $EF = BP \sin B$. Следовательно, длина отрезка EF будет наименьшей при наименьшей длине отрезка BP, то есть тогда, когда BP — высота треугольника ABC.

На рисунке 20.35 отрезок BP — высота треугольника ABC. Алгоритм построения точек M и N понятен из рисунка.

Из построения следует, что периметр любого другого треугольника, вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC, больше периметра треугольника MNP. Поэтому искомый треугольник является единственным — это построенный треугольник MNP.

Можно показать (сделайте это самостоятельно), что точки M и N являются основаниями высот, проведенных соответственно из вершин C и A треугольника ABC.

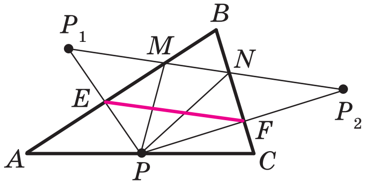


Рис. 20.34

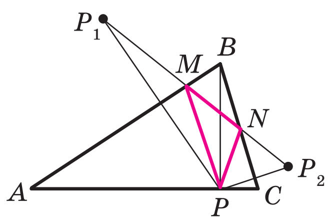


Рис. 20.35

Следовательно, вершины искомого треугольника — это основания высот данного треугольника ABC. Такой треугольник называют **ортоцентрическим**. ◀

Задача 2. Точка O — центр правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$ (рис. 20.36). Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

Решение. Пусть $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{a}$. Рассмотрим поворот с центром O на угол $\frac{360°}{n}$, например, против часовой стрелки. При таком преобразовании образом данного n-угольника будет этот же n-угольник. Следовательно, искомая сумма не изменится. А это возможно лишь тогда, когда $\vec{a} = \vec{0}$. ◀

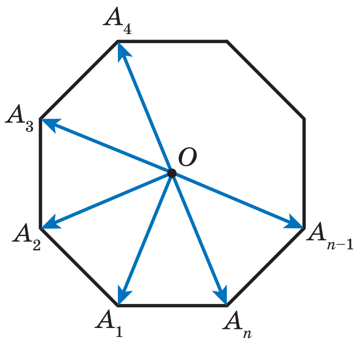


Рис. 20.36

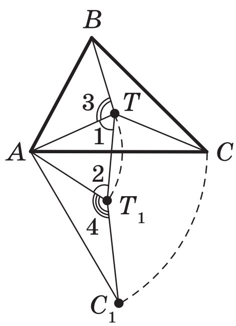


Рис. 20.37

Задача 3. Внутри треугольника ABC, все углы которого меньше 120°, найдите такую точку T, чтобы сумма $TA+TB+TC$ была наименьшей.

Решение. Пусть T — произвольная точка данного треугольника ABC (рис. 20.37). Рассмотрим поворот с центром A на угол 60° по часовой стрелке. Пусть точки T_1 и C_1 — образы точек T и C соответственно (рис. 20.37). Поскольку поворот является движением, то $T_1C_1=TC$. Очевидно, что треугольник ATT_1 равносторонний. Тогда $AT=TT_1$.

Имеем: $TA+TB+TC=TT_1+TB+T_1C_1$.

Понятно, что сумма $TT_1+TB+T_1C_1$ будет наименьшей, если точки B, T, T_1 и C_1 лежат на одной прямой. Поскольку $\angle 1=\angle 2=60°$, то это условие будет выполнено тогда, когда $\angle 3=\angle 4=120°$.

Так как угол AT_1C_1 — образ угла ATC при указанном повороте, то должно выполняться равенство $\angle ATC=120°$.

Итак, точки B, T, T_1 и C_1 будут принадлежать одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. Отсюда $\angle BTC = 120°$.

Таким образом, сумма $TA + TB + TC$ будет наименьшей, если $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$.

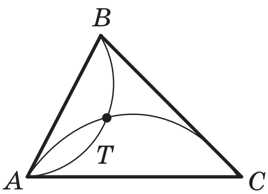


Рис. 20.38

Найти точку T можно, например, построив ГМТ, из которых отрезки AB и AC видны под углами $120°$ (рис. 20.38).

Понятно, что если один из углов треугольника ABC не меньше $120°$, то точка пересечения построенных дуг не будет расположена внутри треугольника. Можно показать, что в треугольнике с углом, не меньшим $120°$, точка T, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является наименьшей, совпадает с вершиной тупого угла. ◀

Задача 4. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекают описанную окружность треугольника ABC соответственно в точках M, N и P (рис. 20.39). Докажем, что $HA_1 = A_1M$, где точка H — ортоцентр треугольника ABC.

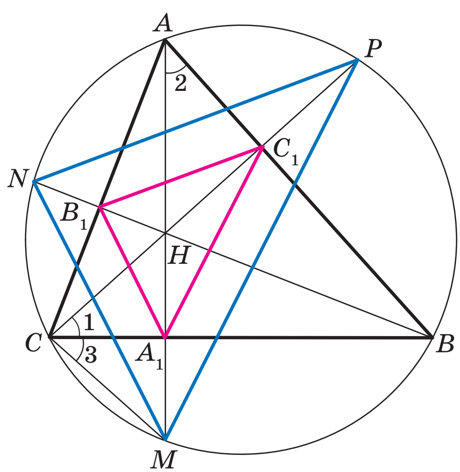


Рис. 20.39

Имеем: $\angle 1 = \angle 2 = 90° - \angle ABC$.

Углы 2 и 3 равны как вписанные, опирающиеся на дугу MB. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

Тогда в треугольнике HCM отрезок CA_1 является биссектрисой и высотой, а следовательно, и медианой. Отсюда $HA_1 = A_1M$.

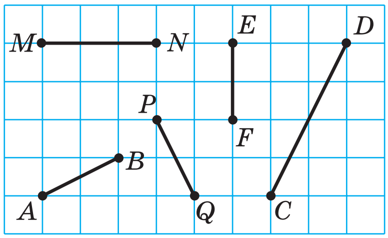
Аналогично можно доказать, что $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

Теперь понятно, что треугольник MNP гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с центром H и коэффициентом 2. Тогда радиус описанной окружности треугольника MNP в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Осталось заметить, что треугольники MNP и ABC вписаны в одну и ту же окружность. ◄

ЗАДАНИЕ № 5 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Какой из отрезков, изображенных на рисунке, может быть образом отрезка AB при движении?

А) MN; Б) PQ; В) EF; Г) DC.

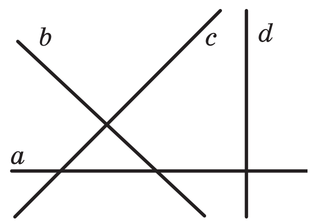


2. Укажите уравнение образа прямой $y=2x$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (0; 1).

А) $y=2x+1$; В) $y=x+1$;
Б) $y=2x-1$; Г) $y=x-1$.

3. Какая из прямых, изображенных на рисунке, может быть образом прямой a при параллельном переносе?

А) b; В) d;
Б) c; Г) a.



4. Какая из указанных фигур имеет только одну ось симметрии?

А) Квадрат; В) парабола;
Б) окружность; Г) отрезок.

5. При каких значениях x и y точки A (–1; y) и B (x; 6) симметричны относительно оси абсцисс?

А) $x=-1$, $y=6$; В) $x=-1$, $y=-6$;
Б) $x=1$, $y=-6$; Г) $x=1$, $y=6$.

6. Какая из указанных фигур имеет центр симметрии?

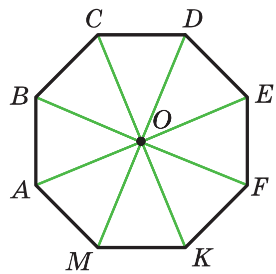
А) Треугольник; В) трапеция;
Б) отрезок; Г) угол.

7. Какая из указанных фигур имеет центр симметрии и ось симметрии?

А) Равносторонний треугольник;
Б) параллелограмм;
В) равнобокая трапеция;
Г) прямая.

8. При каких значениях x и y точки A (x; 7) и B (−4; y) симметричны относительно начала координат?

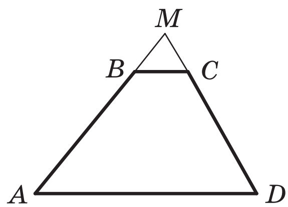
А) $x=4$, $y=-7$; В) $x=-4$, $y=7$;
Б) $x=4$, $y=7$; Г) $x=-4$, $y=-7$.



9. Точка O — центр правильного восьмиугольника $ABCDEFKM$ (см. рисунок). Укажите образ стороны EF при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 135°.

А) AB; В) AM;
Б) BC; Г) CD.

10. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M (см. рисунок). Укажите коэффициент гомотетии с центром в точке M, при которой отрезок BC является образом отрезка AD, если $AB : BM = 7 : 2$.



А) $\frac{2}{7}$; В) $\frac{2}{9}$;
Б) $\frac{7}{2}$; Г) $\frac{9}{2}$.

11. Точка M (6; −3) — образ точки N (2; 1) при гомотетии с коэффициентом $-\frac{1}{3}$. Укажите координаты центра гомотетии.

А) (5; −2); Б) (8; −1); В) (−5; 2); Г) (−8; 1).

12. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке E, а сторону BC — в точке F. Найдите площадь треугольника CEF, если $AE : EC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABC равна 75 см^2.

А) 36 см^2; Б) 50 см^2; В) 30 см^2; Г) 12 см^2.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 5

Движение (перемещение)

Преобразование фигуры F, сохраняющее расстояние между точками, называют движением (перемещением) фигуры F.

Равные фигуры

Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой.

Параллельный перенос

Если точки X и X_1 таковы, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$, то говорят, что точка X_1 — это образ точки X при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

Свойства параллельного переноса

Параллельный перенос является движением.
Если фигура F_1 — образ фигуры F при параллельном переносе, то $F_1 = F$.

Осевая симметрия

Точки A и A_1 называют симметричными относительно прямой l, если прямая l является серединным перпендикуляром отрезка AA_1. Если точка A принадлежит прямой l, то ее считают симметричной самой себе относительно прямой l.

Свойства осевой симметрии

Осевая симметрия является движением.
Если фигуры F и F_1 симметричны относительно прямой, то $F = F_1$.

Фигура, имеющая ось симметрии

Фигуру называют симметричной относительно прямой l, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно прямой l, также принадлежит этой фигуре. Прямую l называют осью симметрии фигуры.

Центральная симметрия

Точки A и A_1 называют симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AA_1. Точку O считают симметричной самой себе.

Свойства центральной симметрии

Центральна симметрия является движением.

Если фигуры F и F_1 симметричны относительно точки, то $F = F_1$.

Фигура, имеющая центр симметрии

Фигуру называют симметричной относительно точки O, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно точки O, также принадлежит этой фигуре. Точку O называют центром симметрии фигуры.

Свойства поворота

Поворот является движением.

Если фигура F_1 — образ фигуры F при повороте, то $F_1 = F$.

Гомотетия

Если точки O, X и X_1 таковы, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$, то говорят, что точка X_1 — это образ точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k.

Свойства гомотетии

При гомотетии фигуры F с коэффициентом k все расстояния между ее точками изменяются в $|k|$ раз, то есть если A и B — произвольные точки фигуры F, а точки A_1 и B_1 — их соответствующие образы при гомотетии с коэффициентом k, то $A_1B_1 = |k|AB$.

Подобие

Две фигуры называют подобными, если одну из них можно получить из другой в результате композиции двух преобразований: гомотетии и движения.

Площади подобных многоугольников

Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

21. Упражнения для повторения курса геометрии 9 класса

1. Решение треугольников

21.1. Две стороны треугольника равны 4 см и 10 см, а синус угла между ними равен $\frac{4}{5}$. Найдите третью сторону треугольника.

21.2. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 2$ см, $AD = 4$ см, $\angle BAD = 60°$. Найдите косинус угла между прямыми AC и BD.

21.3. Установите, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник со сторонами: 1) 4 см, 4 см, 5 см; 2) 5 см, 6 см, 9 см; 3) 5 см, 12 см, 13 см.

21.4. Одна из сторон треугольника равна 21 см, а две другие стороны относятся как 3 : 8. Найдите неизвестные стороны треугольника, если угол между ними равен 60°.

21.5. Одна из сторон треугольника равна 3 см, а вторая сторона — $\sqrt{7}$ см, причем угол, противолежащий второй стороне, равен 60°. Найдите неизвестную сторону треугольника.

21.6. Одна из сторон параллелограмма на 4 см больше другой, а его диагонали равны 12 см и 14 см. Найдите периметр параллелограмма.

21.7. В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $AD = 8$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см. Окружность, проходящая через точки A, B и C, пересекает прямую AD в точке K, $\angle AKB = 60°$. Найдите отрезок BK.

21.8. Основания трапеции равны 3 см и 7 см, а боковые стороны — 6 см и 5 см. Найдите косинусы углов трапеции.

21.9. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке D, $BD = 1$ см, $AD = 5$ см, $\angle ABC = 120°$. Найдите отрезок CD.

21.10. Стороны треугольника равны 11 см, 12 см и 13 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к его большей стороне.

21.11. Найдите биссектрису треугольника, которая делит его сторону на отрезки длиной 3 см и 4 см и образует с этой стороной угол, равный 60°.

21.12. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $BD = a$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 75°$. Найдите отрезок AD.

21.13. Найдите отношение сторон равнобедренного треугольника, один из углов которого равен $120°$.

21.14. В треугольнике ABC известно, что $AC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 60°$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанной окружности треугольника ABC и точки A и C.

21.15. Две стороны треугольника равны 5 см и 8 см, а угол между ними — $60°$. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

21.16. Найдите биссектрису треугольника ABC, проведенную из вершины A, если $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$.

21.17. Биссектриса угла BAD параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABM, если $AB = 4$ см, $\angle BAD = 60°$.

21.18. Найдите наибольшую высоту, радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 4 см, 13 см и 15 см.

21.19. Радиусы двух окружностей равны 17 см и 39 см, а расстояние между их центрами — 44 см. Найдите длину общей хорды данных окружностей.

21.20. Вычислите площадь параллелограмма, одна из сторон которого равна 15 см, а диагонали — 11 см и 25 см.

21.21. Основания трапеции равны 16 см и 44 см, а боковые стороны — 17 см и 25 см. Найдите площадь трапеции.

21.22. Основания трапеции равны 5 см и 12 см, а диагонали — 9 см и 10 см. Найдите площадь трапеции.

2. Правильные многоугольники

21.23. Найдите площадь правильного n-угольника, если радиус вписанной в него окружности равен 6 см, а n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

21.24. В окружность вписан квадрат со стороной 4 см. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в эту же окружность.

21.25. Найдите отношение площадей правильных треугольника и шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

21.26. Середины сторон правильного двенадцатиугольника соединены через одну так, что полученной фигурой является правильный шестиугольник. Найдите сторону данного двенадцатиугольника, если сторона полученного шестиугольника равна a.

21.27. Длина дуги окружности равна 6π см, а ее градусная мера — $24°$. Найдите радиус окружности.

21.28. На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, которая находится вне треугольника и отсекается гипотенузой AB, если $\angle A = 42°$, $AC = 8$ см.

21.29. Сторона квадрата равна $2\sqrt{2}$ см. Найдите длину дуги описанной окружности данного квадрата, концами которой являются две его соседние вершины.

21.30. Расстояние между центрами двух кругов радиуса R равно R. Найдите площадь фигуры, являющейся общей частью этих кругов, и длину линии, ограничивающей эту фигуру.

21.31. Площадь кругового сектора равна $2{,}4\pi$ см^2. Найдите градусную меру дуги этого сектора, если радиус круга равен 4 см.

21.32. Диаметр колеса вагона поезда метрополитена равен 78 см. За 2,5 мин колесо делает 1000 оборотов. Найдите скорость поезда метрополитена в километрах в час. Ответ округлите до десятых.

21.33. Найдите длину окружности, вписанной в сегмент, длина дуги которого равна m, а градусная мера равна 120°.

21.34. К окружности, радиус которой равен R, проведены две касательные, угол между которыми равен 60°. Найдите площадь фигуры, ограниченной касательными и меньшей из дуг, концами которых являются точки касания.

3. Декартовы координаты на плоскости

21.35. Вершинами треугольника являются точки A (−4; 1), B (−2; 4) и C (0; 1). Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и найдите его площадь.

21.36. Найдите координаты точки пересечения серединного перпендикуляра отрезка AB с осью абсцисс, если A (5; −3), B (4; 6).

21.37. Найдите координаты точки пересечения серединного перпендикуляра отрезка CD с осью ординат, если C (2; 1), D (4; −3).

21.38. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (−12; 6), B (0; 11), C (5; −1) и D (−7; −6) является квадратом.

21.39. Точка M (5; −2) является одним из концов диаметра окружности, точка N (2; 0) — центр окружности. Найдите координаты второго конца диаметра.

21.40. Установите, лежат ли точки A (−4; −3), B (26; 7) и C (2; −1) на одной прямой. В случае утвердительного ответа укажите, какая из точек лежит между двумя другими.

21.41. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются точки A (5; 1), B (9; −2) и C (7; 2), прямоугольный, и составьте уравнение окружности, описанной около него.

21.42. Установите, является ли отрезок CD диаметром окружности $(x+2)^2+(y-3)^2=52$, если C (−8; 7), D (4; −1).

21.43. Окружность, центр которой принадлежит оси ординат, проходит через точки A (1; 2) и B (3; 6). Принадлежит ли этой окружности точка C (−3; 4)?

21.44. Окружность с центром в точке M (−5; 3) касается оси ординат. Найдите координаты точек пересечения окружности с осью абсцисс.

21.45. Найдите длину линии, заданной уравнением

$$x^2+y^2-2x+4y-20=0.$$

21.46. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку P (−3; 5), угловой коэффициент которой равен 6.

21.47. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку S (−1; 4) и образует угол 135° с положительным направлением оси абсцисс.

21.48. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A (−3; 1) параллельно прямой $5x+3y=6$.

21.49. Найдите уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки A (−3; −2) и B (2; 5).

4. Векторы на плоскости

21.50. Две вершины прямоугольника $ABCD$ — точки A(3; 2) и B (3; −4). Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен 10. Найдите координаты точек C и D.

21.51. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 21.1). Выразите векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

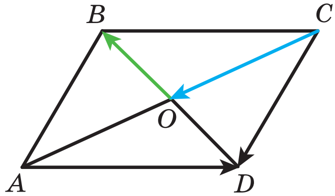


Рис. 21.1

21.52. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Найдите:

1) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$;

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}$.

21.53. Найдите модуль вектора $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, где $\vec{a}\,(1; -2)$, $\vec{b}\,(-1; 3)$.

21.54. Точки E и F — середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно (рис. 21.2). Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

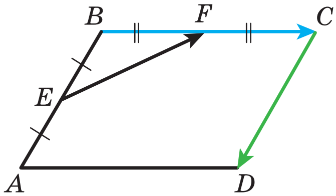


Рис. 21.2

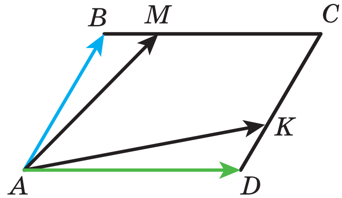


Рис. 21.3

21.55. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и K соответственно, причем $BM = \frac{1}{4}BC$, $CK = \frac{2}{3}CD$ (рис. 21.3). Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

21.56. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили такие точки D и E соответственно, что $AD : DC = 1 : 2$, $BE : EC = 2 : 1$. Выразите векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

21.57. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KP}$, если $M\,(4; -1)$, $N\,(-6; 5)$, $K\,(7; -2)$, $P\,(2; 1)$?

21.58. Найдите значение k, при котором векторы $\vec{a}\,(k; -2)$ и $\vec{b}\,(6; 3)$ коллинеарны.

21.59. Даны векторы $\vec{a}\,(3; -2)$ и $\vec{b}\,(x; 4)$. При каком значении x выполняется равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

21.60. Найдите косинусы углов треугольника ABC, если $A\,(-3; -4)$, $B\,(2; -3)$, $C\,(3; 5)$. Установите вид треугольника.

21.61. Даны векторы $\vec{a}\,(2; -1)$ и $\vec{b}\,(1; -2)$. Найдите значение m, при котором векторы $\vec{a} + m\vec{b}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

21.62. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и $\vec{m} \perp \vec{n}$.

21.63. Даны векторы $\vec{a}\,(2;\,-4)$ и $\vec{b}\,(-1;\,1)$. Найдите:

1) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$;

2) $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|$.

21.64. Составьте уравнение прямой, которая касается окружности с центром $M\,(0;\,-4)$ в точке $A\,(5;\,-3)$.

5. Геометрические преобразования

21.65. При параллельном переносе образом точки $A\,(3;\,-2)$ является точка $B\,(5;\,-3)$. Какая точка является образом точки $C\,(-3;\,4)$ при этом параллельном переносе?

21.66. Постройте образы точек $A\,(1;\,-3)$, $B\,(0;\,-5)$ и $C\,(2;\,1)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\,(-2;\,1)$. Запишите координаты построенных точек.

21.67. Даны точки $C\,(7;\,-4)$ и $D\,(-1;\,8)$. При параллельном переносе образом середины отрезка CD является точка $P\,(-1;\,-3)$. Найдите координаты точек, являющихся образами точек C и D.

21.68. На рисунке 21.4 $CB=CD$, $\angle ACB=\angle ACD$. Докажите, что точки B и D симметричны относительно прямой AC.

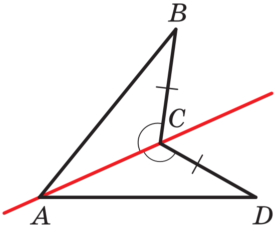


Рис. 21.4

21.69. Найдите координаты точек, симметричных точке $K\,(4;\,-2)$ относительно осей координат и начала координат.

21.70. Найдите x и y, если точки $A\,(x;\,-2)$ и $B\,(3;\,y)$ симметричны относительно оси абсцисс.

21.71. Даны луч OA и точка B, ему не принадлежащая. Постройте луч, симметричный данному относительно точки B.

21.72. Симметричны ли точки $M\,(-3;\,10)$ и $N\,(-1;\,6)$ относительно точки $K\,(1;\,4)$?

21.73. Запишите уравнение окружности, симметричной окружности $(x+4)^2+(y-5)^2=11$ относительно:

1) начала координат;

2) точки $M\,(-3;\,3)$.

21.74. Даны точки K и O. Постройте точку K_1, являющуюся образом точки K при повороте вокруг точки O: 1) на угол $130°$ против часовой стрелки; 2) на угол $40°$ по часовой стрелке.

21.75. Даны отрезок AB и точка O, ему не принадлежащая. Постройте отрезок A_1B_1, являющийся образом отрезка AB при повороте на угол $50°$ вокруг точки O по часовой стрелке.

21.76. На какой угол надо повернуть прямоугольник, отличный от квадрата, вокруг его центра симметрии, чтобы его образом был этот же прямоугольник?

21.77. Постройте треугольник, гомотетичный данному тупоугольному треугольнику, если центром гомотетии является центр описанной окружности треугольника, коэффициент гомотетии $k=-2$.

21.78. Образом точки A (8; −2) при гомотетии с центром в начале координат является точка B (4; −1). Найдите коэффициент гомотетии.

21.79. Стороны двух правильных треугольников равны 8 см и 28 см. Чему равно отношение их площадей?

21.80. Многоугольник F_1 подобен многоугольнику F_2 с коэффициентом подобия k. Буквами P_1, P_2, S_1, S_2 обозначили соответственно их периметры и площади. Заполните пустые ячейки таблицы.

P_1	P_2	S_1	S_2	k
	19	64	16	
12	36	7		
	35	4	100	
	21	36		2

21.81. Прямая, параллельная стороне треугольника длиной 6 см, делит его на две фигуры, площади которых относятся как 1 : 3. Найдите отрезок этой прямой, содержащийся между сторонами треугольника.

21.82. На стороне BC квадрата $ABCD$ отметили точку M так, что $BM : MC=1 : 2$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника BPM, если площадь треугольника APD равна 27 см^2.

21.83. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите площадь трапеции, если $AB : BM=5 : 3$, $AD>BC$, а площадь треугольника AMD равна 32 см^2.

21.84. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. К окружности, вписанной в этот треугольник, проведена касательная, параллельная основанию AC, которая пересекает стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Вычислите площадь треугольника MBK.

21.85. На продолжениях медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC отметили соответственно точки A_2, B_2 и C_2 так, что $A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1$, $B_1B_2 = \frac{1}{2}BB_1$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}CC_1$ (рис. 21.5). Найдите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площадь треугольника ABC равна 1 см^2.

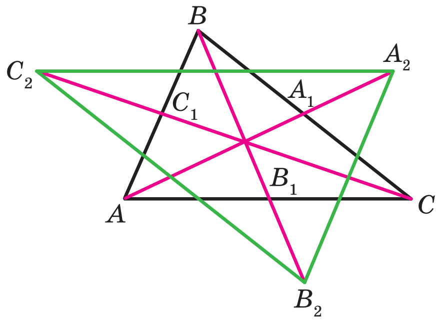


Рис. 21.5

Дружим с компьютером

Вы продолжите совершенствовать навыки пользования компьютером, приобретенные в 7 и 8 классах, осваивать новые инструменты и новые программные средства. Напомним, что кроме заданий, приведенных в этом разделе, вы можете использовать разнообразные программы, созданные для освоения школьного курса геометрии. Вы можете обращаться к глобальной сети Интернет для поиска таких программ и другой дополнительной информации к курсу геометрии.

В учебнике приведены краткие исторические сведения о знаменитых ученых, труды которых связаны с изучаемыми темами. С помощью глобальной сети Интернет вы можете получить больше информации об их биографиях и научных открытиях.

Если вы планируете выбрать профессию, которая требует постоянно использовать математические знания, то можно начать осваивать математические пакеты (например, *Mathcad*, *MATHLAB* и т. п.), содержащие мощный инструментарий для математических вычислений, геометрических построений и т. п. Для будущего инженера необходимо знание инженерной графики и умение строить сложные чертежи (приобрести эти умения можно, например, пользуясь пакетом *AutoCAD*). Вы можете осваивать эти программные средства, выполняя задания к курсу геометрии.

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. В основном это задания на построение геометрических фигур, которые вы будете выполнять с помощью графического редактора, и вычисления, которые вы можете выполнять с помощью калькулятора либо математических пакетов.

Кроме этих заданий, вы можете выполнять задания из рубрики «Практические задания» не только в тетради, но и с помощью компьютерных программ.

Значительная часть курса геометрии 9 класса посвящена декартовым координатам на плоскости, уравнениям некоторых фигур. В зависимости от возможностей языка программирования, который вы изучаете на уроках информатики или самостоятельно, рекомендуем написать программы для изображения на экране компьютера точек с заданными координатами; прямых и окружностей с заданными уравнениями и т. п. Эти задания можно выполнять на уроках информатики или в ходе внеклассной работы по самостоятельному изучению программирования. Ниже приведены простейшие задания; используя их в качестве идей, вы можете самостоятельно придумывать новые задания и создавать программы для их выполнения.

Синус, косинус и тангенс угла от 0° до 180°

1. Научитесь вычислять тригонометрические функции угла, а также находить величину угла по значениям его тригонометрических функций с помощью калькулятора.

Теорема косинусов

2. Проиллюстрируйте следствие из теоремы косинусов с помощью графического редактора следующим образом.

Выберите набор положительных чисел, удовлетворяющих условию $a^2 < b^2 + c^2$, где a — наибольшее число из выбранных. Постройте набор отрезков с заданными длинами a, b и c. Составьте из этих отрезков треугольник. Получился ли он остроугольным? Проделайте эти же действия для условий $a^2 > b^2 + c^2$ и $a^2 = b^2 + c^2$. Числа a, b и c должны удовлетворять условию $a < b + c$.

Теорема синусов

3. Изобразите произвольный треугольник, измерьте с помощью средств графического редактора его стороны и углы. Проверьте, выполняется ли теорема синусов. Вычисления проводите также с помощью компьютера.

Решение треугольников. Формулы для нахождения площади треугольника

4. Задания пп. 4, 5, требующие нахождения значений тригонометрических функций и проведения большого объема вычислений, выполняйте с помощью компьютера.

Правильные многоугольники и их свойства

5. Придумайте, как строить правильные многоугольники. Рассмотрите два способа: 1) используйте теорему 6.2 и формулу для вычисления величины центрального угла вписанного многоугольника; 2) используйте информацию о величине угла правильного многоугольника и длине его стороны.
6. Постройте несколько правильных многоугольников с заданным количеством сторон.

Длина окружности. Площадь круга

7. Вычислите несколько раз длину окружности и площадь круга, используя приближения числа π с различной точностью.

Есть ли в калькуляторе или математическом пакете, которым вы пользуетесь, средства для использования стандартного значения числа π? С какой точностью представляют число π эти средства?

Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка

8. Большинство графических редакторов представляют поле для рисования в виде координатной плоскости. Исследуйте, каким образом задаются координаты точек на этой плоскости. Продумайте, как вы можете использовать этот инструментарий для выполнения построений.

Уравнение фигуры

9. Если вы изучаете математические пакеты, то можете с их помощью построить несколько произвольных фигур с заданными уравнениями.
10. Изучая программирование на уроках информатики, вы можете создать свои средства для рисования фигур по заданному уравнению.
11. Найдите в глобальной сети Интернет информацию об устройствах для автоматизации чертежных работ (так называемые плоттеры, англ. *plotter*). Чем похожи и чем отличаются принципы построения изображений на экране компьютера и на бумаге плоттера? Ознакомьтесь с понятием «черепашья графика».
12. Напишите программу, которая по заданным значениям величин a, b и c делает вывод, какая фигура является графиком уравнения $ax+by=c$, выводит сообщение об этом и изображает этот график на экране компьютера.

Угловой коэффициент прямой

13. Какие средства графического редактора можно использовать, чтобы построить прямую с заданным угловым коэффициентом?
14. Напишите программу, которая по заданным значениям величин k и b строит изображение прямой $y=kx+b$ на экране компьютера.

Понятие вектора

15. Изобразите с помощью графического редактора несколько векторов, иллюстрирующих содержание п. 12 учебника. Какой инструмент вы используете для построения коллинеарных векторов? сонаправленных векторов? противоположно направленных векторов? Определите модули построенных векторов. Как это можно сделать проще всего?

Координаты вектора

16. Изобразите на экране компьютера декартову систему координат, выберите удобный единичный отрезок. Задайте координаты вектора и координаты некоторой точки. Отложите от этой точки вектор с заданными координатами.

Сложение и вычитание векторов

17. Нарисуйте несколько произвольных векторов. С помощью какого инструмента графического редактора проще всего находить сумму и разность этих векторов?

Умножение вектора на число

18. Нарисуйте произвольный вектор и задайте несколько произвольных чисел (натуральных, целых, дробных). Постройте векторы, являющиеся произведениями нарисованного вектора и этих чисел.

Скалярное произведение векторов

19. Постройте на координатной плоскости два произвольных вектора. Найдите величину угла между ними с помощью следствия из теоремы 16.2. Проверьте полученный результат, определив угол между этими векторами с помощью средств графического редактора.

Геометрические преобразования

20. Определите, какие средства графического редактора позволяют выполнять перемещение фигуры. Какие виды перемещения можно реализовать с их помощью?
21. Найдите средства графического редактора, с помощью которых можно построить: 1) фигуру, симметричную данной фигуре относительно данной прямой; 2) фигуру, симметричную данной фигуре относительно данной точки; 3) фигуру, гомотетичную данной фигуре.
22. Найдите средства графического редактора, с помощью которых можно построить фигуру, подобную данной произвольной фигуре. Какие средства надо использовать, чтобы эти фигуры были подобны с заданным коэффициентом?

Ответы и указания к упражнениям

§ 1. Решение треугольников

1. Синус, косинус и тангенс угла от $0°$ до $180°$

1.11. 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ или $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6. **1.12.** 1) $\frac{12}{13}$ или $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$. **1.15.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $-1{,}5$; 3) $-\sqrt{3}-2$. **1.16.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$. **1.21.** $-\frac{1}{2}$. **1.22.** $120°$. **1.23.** 10 см, $30°$, $120°$. **1.26.** $5\sqrt{6}$ см.

2. Теорема косинусов

2.3. $120°$. **2.4.** $45°$. **2.10.** $2\sqrt{7}$ см. **2.11.** $\sqrt{10}$ см. **2.12.** $\sqrt{21}$ см или $\sqrt{29}$ см. **2.13.** 13 см. **2.14.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.15.** $3\sqrt{89}$ см. **2.16.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **2.17.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **2.18.** 15 см, 24 см. **2.19.** 2 см, $4\sqrt{3}$ см. **2.20.** 3 см, 5 см. **2.21.** 10 см, 6 см, 14 см. **2.22.** 6 см или 10 см. **2.23.** 75 см. **2.24.** 13 см. **2.25.** $\sqrt{79}$ см. **2.29.** 14 см. **2.30.** 34 см. **2.31.** 7 см, 9 см. **2.32.** 20 см, 30 см. **2.33.** 8 см. *Указание*. Проведите через вершину B прямую, параллельную стороне CD, и рассмотрите образовавшийся при этом треугольник. **2.34.** $\frac{13}{20}$. **2.35.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **2.36.** Нет. **2.38.** 10 см. **2.39.** 6 см. **2.40.** 11 см. **2.41.** 6 см. **2.42.** 22 см. **2.47.** 4 см, 6 см.

3. Теорема синусов

3.14. $2\sqrt{6}$ см. **3.15.** 6 см. **3.16.** $\frac{a\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}$. **3.17.** $\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **3.18.** $\frac{c\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma\sin\varphi}$. **3.19.** $\frac{m\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **3.21.** 9 см. **3.22.** $\frac{25}{3}$ см. **3.23.** $60°$ или $120°$. **3.24.** 4,5 ч. **3.25.** $\frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$. **3.26.** $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45°+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. **3.28.** $\frac{85}{8}$ см. *Указание*. Искомый радиус можно найти как радиус окружности, описанной около треугольника, сторонами которого является одно из оснований, боковая сторона и диагональ трапеции. **3.29.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$. *Указание*. Докажите, что $CE = DE$. **3.30.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. *Указание*. На продолжении медианы AM за точку M отметьте точку K такую, что $AM = MK$, и примените теорему синусов к треугольнику ACK или треугольнику ABK. **3.31.** $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. **3.32.** *Указание*. Выразите углы AHB, BHC и AHC через углы треугольника ABC. **3.33.** Скорее доехать через село C. *Указание*. Примите расстояние между какими-нибудь двумя селами за a и выразите через a расстояния между другими селами. **3.34.** Автобус. **3.37.** 12 см.

4. Решение треугольников

4.12. 107°, 73°, 132°, 48°. *Указание*. Проведите через один из концов меньшего основания прямую, параллельную боковой стороне трапеции, и рассмотрите образовавшийся при этом треугольник. **4.13.** 9 см. **4.14.** 30 см, 48 см.

5. Формулы для нахождения площади треугольника

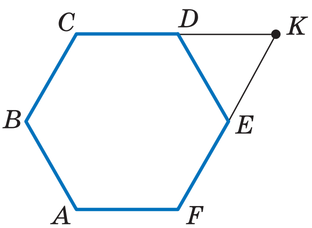
5.4. 1) 60° или 120°; 2) 90°. **5.5.** 30° или 150°. **5.9.** 12 см. **5.10.** 24 см. **5.11.** 24 см². **5.12.** $\frac{7}{3}$ см. **5.13.** 1) $\frac{3}{2}$ см, $\frac{25}{8}$ см; 2) 8 см, $\frac{145}{8}$ см. **5.14.** 2 см, $\frac{145}{8}$ см. **5.25.** 3 : 5. **5.26.** $\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **5.27.** $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$. **5.28.** $\frac{b^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **5.29.** $\frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$. **5.30.** $\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **5.31.** 51 см², 75 см², 84 см². **5.32.** $\frac{24}{7}$ см. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$. **5.33.** 360 см². *Указание*. Проведите через один из концов меньшего основания трапеции прямую, параллельную боковой стороне трапеции, и найдите высоту треугольника, который эта прямая отсекает от трапеции. **5.34.** $12\sqrt{5}$ см². *Указание*. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $BC \parallel AD$. Проведите через вершину C прямую, которая параллельна прямой BD и пересекает прямую AD в точке E. Докажите, что треугольник ACE и данная трапеция равновелики. **5.35.** 1 : 2. *Ука-*

зание. $\dfrac{S_{AMK}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}AK \cdot AM \sin A}{\frac{1}{2}AC \cdot AB \sin A} = \cos^2 A$. **5.36.** 19,5 см. **5.37.** 13 см, 14 см, 15 см. **5.39.** 10°. **5.40.** 91 см, 21 см. **5.41.** 9,6 см.

§ 2. Правильные многоугольники

6. Правильные многоугольники и их свойства

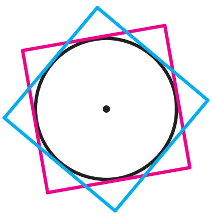
6.20. $\sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}}$. **6.21.** $2\sqrt{R^2 - r^2}$. **6.22.** $\sqrt{r^2 + \dfrac{a^2}{4}}$. **6.26.** $\approx$ 17,4 см. **6.27.** $\approx$ 19,8 см. **6.28.** 5 сторон. **6.29.** 18 сторон. **6.32.** 1) $\dfrac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$; 2) $\dfrac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}$. **6.33.** 1) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **6.34.** $1:2$. **6.35.** $\sqrt{3}:2$. **6.38.** 4,4 см. **6.39.** $2R^2\sqrt{2}$. **6.40.** $a\sqrt{3}$; $2a$; $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **6.41.** $6\left(\sqrt{2}-1\right)$ см. **6.42.** 8 см. **6.43.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a\left(\sqrt{2}+1\right)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **6.44.** $\dfrac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$. **6.45.** $\dfrac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$. **6.46.** Треугольников, или квадратов, или шестиугольников. *Указание*. Около одной точки можно уложить столько дощечек, во сколько раз угол при вершине дощечки, равный $\dfrac{180°(n-2)}{n}$, меньше 360°, то есть $360° : \dfrac{180°(n-2)}{n} = \dfrac{2n}{n-2}$ дощечек. Значение выражения $\dfrac{2n}{n-2}$ должно быть натуральным числом. Поскольку $\dfrac{2n}{n-2} = \dfrac{2n-4+4}{n-2} = 2 + \dfrac{4}{n-2}$, то значение выражения $\dfrac{4}{n-2}$ должно быть натуральным числом. **6.47.** *Указание*. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник (см. рисунок), K — точка пересечения прямых CD и EF. Тогда AK — искомый отрезок. **6.49.** 18 см. **6.50.** 96 см². **6.51.** 9 см.



К задаче 6.47

7. Длина окружности. Площадь круга

7.25. 22,5°. **7.30.** $\sqrt{6}$ см. **7.32.** 1) $\frac{25\left(\pi-2\sqrt{2}\right)}{8}$ см^2; 2) $\frac{25(5\pi-3)}{12}$ см^2; 3) $\frac{25(11\pi+3)}{12}$ см^2. **7.33.** 1) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$ см^2; 2) $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{3}$ см^2. **7.38.** 2π см, $\frac{10\pi}{3}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **7.39.** $\frac{25\pi}{18}$ см, $\frac{35\pi}{18}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **7.40.** $\frac{8\pi}{3}$ см. **7.41.** 6π см. **7.42.** 1:1. *Указание.* Докажите, что в обоих случаях сумма длин полуокружностей равна $\frac{1}{2}\pi AB$. **7.44.** 50 см. **7.46.** $\frac{a^2(\pi-2)}{8}$. **7.47.** $\approx 17{,}3\ \%$. **7.48.** $\frac{a^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{36}$. **7.49.** $\frac{\pi R^2}{9}$. **7.50.** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **7.51.** $\frac{2\pi a}{3}$. *Указание.* Рассмотрите треугольник AND и докажите, что он равносторонний. **7.52.** *Указание.* Сумма площадей всех закрашенных и незакрашенных луночек равна сумме площадей двух кругов, диаметры которых являются соседними сторонами прямоугольника, а сумма площадей незакрашенных луночек и прямоугольника равна площади круга, диаметр которого является диагональю прямоугольника. Покажите, что эти суммы равны. **7.53.** *Указание.* Общая часть квадратов содержит круг, радиус которого равен $\frac{1}{2}$ см (см. рисунок). **7.55.** $\frac{130}{17}$ см, $\frac{312}{17}$ см. **7.56.** *Указание.* Через середину меньшего основания проведите прямые, параллельные боковым сторонам трапеции.



К задаче 7.53

§ 3. Декартовы координаты на плоскости

8. Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка

8.13. 1) Да, точка B лежит между точками A и C; 2) нет. **8.15.** $x=7$ или $x=-1$. **8.16.** (3; 0). **8.17.** (0; 0,5). **8.18.** (3; −0,5). **8.19.** (−2; 2). **8.20.** (3; −2). **8.24.** A (−5; 3), C (7; 5). **8.25.** $2\sqrt{73}$. **8.26.** $\left(3\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}\right)$ или $\left(-3\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}\right)$. **8.27.** $\left(-2;\ 4\sqrt{3}\right)$ или $\left(-2;\ -4\sqrt{3}\right)$. **8.28.** (3; 3) или (−6; 6). *Указание.* Рассмотрите два случая: B $(a;\ a)$ или B $(a;\ -a)$.

8.29. (5,5; 0), (3; 0), (−1; 0). *Указание*. Рассмотрите три случая: $AC=BC$, $AC=AB$ и $BC=AB$. **8.30.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Указание*. Рассмотрите три случая: $AC^2+BC^2=AB^2$, $AB^2+BC^2=AC^2$, $AC^2+AB^2=BC^2$. **8.31.** $\sqrt{33}$ см. **8.32.** 56°, 124°. **8.33.** 8 см и 16 см.

9. Уравнение фигуры. Уравнение окружности

9.16. Две окружности: $x^2+(y-11)^2=45$ и $x^2+(y+1)^2=45$. **9.17.** $(x-3)^2+y^2=50$. **9.19.** 1) Да, точка (−1; 5) — центр окружности, $R=7$; 2) нет; 3) нет; 4) да, точка (2; 7) — центр окружности, $R=\sqrt{2}$. **9.20.** 1) Точка (0; −8) — центр окружности, $R=2$; 2) точка (4; −2) — центр окружности, $R=\sqrt{5}$. **9.21.** $(x-2)^2+y^2=13$. **9.22.** $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ или $(x-3)^2+(y-8)^2=25$. **9.23.** $(x+5)^2+(y-2)^2=10$ или $(x+1)^2+(y+2)^2=10$. **9.24.** $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ или $(x+2)^2+(y+2)^2=4$. *Указание*. Диаметр искомой окружности равен расстоянию между осью абсцисс и прямой $y=-4$, а центр окружности принадлежит биссектрисе третьего или четвертого координатного угла. **9.25.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ или $(x-1)^2+(y+1)^2=1$. **9.26.** 1) $(x+3)^2+(y-2)^2=25$; 2) $(x+1)^2+(y+3)^2=169$. **9.27.** $180\sqrt{3}$ см². **9.28.** 70 см. **9.29.** 600 см².

10. Уравнение прямой

10.7. 1) $y=2x-5$; 2) $x=3$; 3) $y=-1$; 4) $5x+3y=6$. **10.8.** 1) $y=-3x+1$; 2) $x-6y=12$. **10.9.** 1) (−8; −31); 2) (−1; 2). **10.10.** 1) (2; −7); 2) (4; −1). **10.11.** $y=-0{,}5x-4$. **10.12.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$. **10.14.** 12. **10.15.** 28. **10.16.** 6. **10.17.** (2; 5), (5; 2). **10.18.** (5; 0). **10.20.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Указание*. Искомое расстояние равно высоте треугольника, ограниченного осями координат и данной прямой. **10.21.** $4\sqrt{2}$. **10.22.** $3\sqrt{10}$. **10.23.** $x-3y=2$. **10.24.** $7x+5y=-8$. **10.25.** (3; 3) или (15; 15). **10.26.** (−2; 2) или (−10; 10). **10.27.** $(x-3)^2+(y-4)^2=17$. **10.28.** $(y-4)\times(y+4)=0$. **10.29.** $\sqrt{10}$ см, $\sqrt{58}$ см. **10.30.** 104 см. **10.31.** 12,5 см.

11. Угловой коэффициент прямой

11.5. 1) $y=4x+19$; 2) $y=-3x-2$; 3) $y=7$. **11.6.** $y=-0{,}5x-4$. **11.7.** 1) $y=-7x+2$; 2) $3x-4y=-39$. **11.8.** 1) $y=9x+13$; 2) $3x+y=9$. **11.9.** 1) $y=x\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}$; 2) $y=-x\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}$. **11.10.** 1) $y=x-5$; 2) $y=-x+1$. **11.11.** *а*) $y=\frac{x\sqrt{3}}{3}+3$; *б*) $y=-\frac{x\sqrt{3}}{3}+2$. **11.12.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **11.14.** $y=4x+9$. **11.15.** $y=3x-12$. **11.16.** $y=x+4$. **11.18.** 30 см, 40 см. **11.19.** 144 см².

§ 4. Векторы

12. Понятие вектора

12.26. Прямоугольник или равнобокая трапеция. **12.34.** 60°, 120°. **12.35.** 4 см, 12 см. **12.36.** $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. *Указание*. Проведите через вершину B прямую, параллельную прямой MK.

13. Координаты вектора

13.16. $\overrightarrow{AF}(-2;\ 2)$, $\overrightarrow{FD}(2;\ 4)$. **13.17.** $\overrightarrow{DE}(-4;\ 6)$, $\overrightarrow{EO}(-4;\ -6)$. **13.18.** $\vec{a}\ (-6;\ -8)$ или $\vec{a}\ (8;\ 6)$. **13.19.** $\vec{c}\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$ или $\vec{c}\left(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right)$. **13.20.** C (7; 17), D (2; 17) или C (7; −7), D (2; −7). **13.21.** B (16; 2), C (16; −6) или B (−14; 2), C (−14; −6). **13.23.** 20 см, 7 см, 21 см. **13.24.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

14. Сложение и вычитание векторов

14.45. 1) Да; 2) да; 3) нет. **14.46.** *Указание*. Покажите, что каждый из векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ равен нуль-вектору. **14.48.** *Указание*. Достаточно показать, что $\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{XD}-\overrightarrow{XC}$. **14.49.** Окружность радиуса AB с центром в точке A. **14.50.** Серединный перпендикуляр отрезка AB. **14.51.** 0,2 м/с, $\sqrt{1{,}04}$ м/с. **14.52.** 60°. **14.53.** *Указание*. Пусть отрезок AA_1 — медиана треугольника ABC. На продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложите отрезок A_1D, равный MA_1. **14.54.** *Указание*. Имеем: $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+$ $+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, отсюда $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$. **14.55.** 4 см, 6 см. **14.56.** 2,5 см.

15. Умножение вектора на число

15.31. −4; 4. **15.32.** −1,5. **15.34.** $\vec{m}\ (-15;\ 36)$. **15.35.** $\vec{a}\ (-3;\ 4)$. **15.38.** $x=2$, $y=-3$. **15.39.** $\overrightarrow{OK}=0{,}5\vec{a}-0{,}1\vec{b}$. **15.43.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **15.45.** *Указание*. С одной стороны, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2M_2}$. С другой стороны, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2M_2}$. Сложите эти равенства. **15.51.** *Указание*. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Воспользуйтесь тем, что $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. **15.52.** *Указание*. Воспользуйтесь задачей 15.45 и ключевой задачей 1 п. 15. **15.53.** *Указание*. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. **15.54.** 18 см. **15.55.** 60°; $24\sqrt{3}$ см². **15.56.** $R\sqrt{3}$.

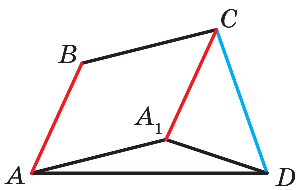
16. Скалярное произведение векторов

16.17. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **16.20.** −3 и 3. **16.21.** −1. **16.23.** $\vec{b}\,(-12; 16)$. **16.24.** −1 и 1. **16.26.** 4. **16.27.** −0,5. **16.28.** $\sqrt{7}$. **16.29.** $2\sqrt{7}$. **16.32.** $\frac{3}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$. **16.33.** 30°, 60°, 90°. **16.36.** 0°. **16.37.** 120°. **16.38.** *Указание*. Пусть $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AK}$. **16.39.** 45°. *Указание*. Пусть $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$. **16.40.** 30°. *Указание*. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$. Отсюда $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\cos\angle ABD$. **16.41.** *Указание*. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BF}$. Осталось показать, что $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. **16.43.** 100 см. **16.44.** 6π см.

§ 5. Геометрические преобразования

17. Движение (перемещение) фигуры. Параллельный перенос

17.13. При $AB \parallel a$. **17.23.** Бесконечно много. **17.29.** $(x+3)^2+(y-4)^2=1$. **17.30.** $y=x^2-4x+1$. **17.31.** *Указание*. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция ($BC \parallel AD$). Постройте образ диагонали BD при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$. **17.33.** *Указание*. Постройте образ данной прямой при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ (или $\overrightarrow{BA}$). Рассмотрите точки пересечения образа с данной окружностью. Заметим, что если построенный образ и данная окружность не имеют общих точек, то задача не имеет решения. **17.35.** *Указание*. Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник с данными сторонами AB и CD (см. рисунок). Рассмотрим параллельный перенос стороны AB на вектор $\overrightarrow{BC}$. Треугольник A_1CD можно построить по двум сторонам CD и $CA_1=BA$ и углу A_1CD, равному $\angle BCD-(180°-\angle ABC)$. Треугольник AA_1D можно построить по стороне A_1D и двум приле-

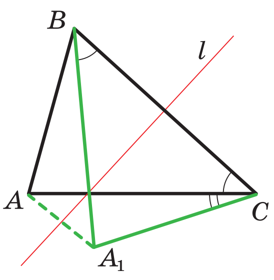


К задаче 17.35

жащим углам AA_1D и ADA_1. **17.36.** *Указание*. Пусть точка A_1 — образ точки A при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$. Соедините точки A_1 и B. **17.37.** 36 см. **17.38.** 40. **17.39.** 490 см^2.

18. Осевая симметрия

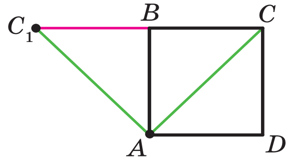
18.21. $a \perp l$ или прямые a и l совпадают. **18.24.** *Указание*. Если четырехугольник имеет ось симметрии, то образом любой его вершины является вершина этого же четырехугольника. Выберите некоторую вершину параллелограмма и рассмотрите две возможности: ее образом является или соседняя вершина, или противолежащая. **18.27.** *Указание*. Углы M_1BA и MBA симметричны относительно прямой AB. Следовательно, $\angle M_1BA = \angle MBA$. Аналогично $\angle M_2BC = \angle MBC$. Осталось показать, что $\angle M_1BM_2 = 180°$. **18.28.** 1) $A_1(0; -2)$, $B_1(-1; 3)$; 2) $A_2(0; 2)$, $B_2(1; -3)$. **18.29.** $x=2$, $y=-1$. **18.30.** *Указание*. Пусть точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой a. Тогда точка пересечения прямых a и A_1B будет искомой. Заметим, что если точки A и B симметричны относительно прямой a, то задача имеет бесконечно много решений. Если точки A и B равноудалены, но не симметричны относительно прямой a, то задача не имеет решения. **18.32.** *Указание*. Пусть точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой a. Тогда точка пересечения прямых a и A_1B будет искомой. **18.33.** *Указание*. Пусть треугольник A_1BC — образ треугольника ABC при симметрии относительно серединного перпендикуляра отрезка BC (см. рисунок). Треугольник ACA_1 можно построить по известным сторонам AC и A_1C ($A_1C = AB$) и углу ACA_1, равному разности углов B и C. **18.34.** *Указание*. Пусть точка C_1 симметрична точке C относительно прямой AB. Постройте окружность с центром в точке C_1, касающуюся прямой AB. Проведите через точку D касательную к построенной окружности. Эта касательная пересекает прямую AB в искомой точке. **18.35.** *Указание*. Пусть прямая l — серединный перпендикуляр диагонали AC. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой l. Воспользуйтесь тем, что четырехугольники $ABCD$ и AB_1CD равновелики. **18.36.** Точка пересечения высот треугольника ABC. **18.37.** CD; 7 см, 10 см. **18.39.** $y = 0{,}5x - 0{,}5$.



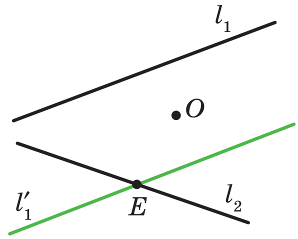
К задаче 18.33

19. Центральная симметрия. Поворот

19.22. *Указание*. Предположим, что треугольник ABC имеет центр симметрии. Тогда, например, образом вершины A является вершина B. Следовательно, центр симметрии — это середина стороны AB. Однако в этом случае образ вершины C не будет принадлежать треугольнику ABC. **19.24.** *Указание*. При центральной симметрии образом стороны данного четырехугольника является сторона этого же четырехугольника. Далее воспользуйтесь ключевой задачей 1 п. 19. **19.25.** *Указание*. При симметрии относительно точки O образы точек A_1 и B_1 принадлежат окружности с центром O_2. Поскольку образом прямой, проходящей через центр симметрии, является эта же прямая, то образы точек A_1 и B_1 также принадлежат прямой A_1B_1. Следовательно, отрезок A_2B_2 — образ отрезка A_1B_1. **19.26.** 2 см или 1 см. **19.27.** 2 см. *Указание*. При рассматриваемом повороте точка B является образом точки D, точка C_1 — образом точки C, точка A — образом точки A (см. рисунок). Следовательно, треугольник ABC_1 — образ треугольника ADC. Отсюда $\angle ABC_1 = \angle ADC = 90°$. Следовательно, точки C_1, B и C лежат на одной прямой. **19.28.** *Указание*. Рассмотрите центральную симметрию с центром в точке пересечения диагоналей одного из параллелограммов. **19.29.** *Указание*. Найдите середину отрезка AC, а далее воспользуйтесь задачей 2 п. 19. **19.30.** *Указание*. Пусть O — данная точка, l_1 и l_2 — данные прямые. Построим образ прямой l_1 при симметрии относительно точки O. Получим прямую l_1' (см. рисунок), которая пересекает прямую l_2 в точке E. Найдем прообраз точки E при рассматриваемой симметрии. Очевидно, что он должен принадлежать прямой l_1. Следовательно, точка, симметричная точке E относительно точки O, также принадлежит прямой l_1.

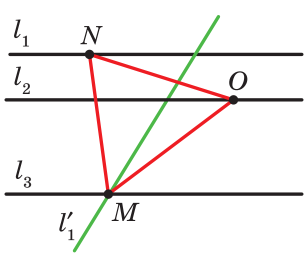


К задаче 19.27

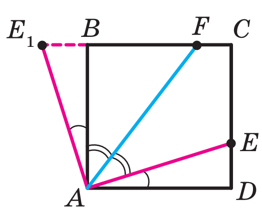


К задаче 19.30

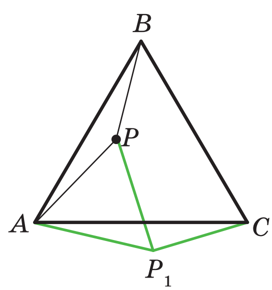
19.31. *Указание.* Воспользуйтесь идеей решения задачи 4 п. 19. **19.32.** *Указание.* Рассмотрим поворот с центром в точке C против часовой стрелки на угол $60°$. При таком повороте образами точек E и B будут соответственно точки D и A. Следовательно, отрезок AD и его середина K будут соответственно образами отрезка BE и его середины M. **19.33.** *Указание.* Пусть l_1, l_2 и l_3 — данные параллельные прямые, O — произвольная точка прямой l_2 (см. рисунок). Прямая l_1' — образ прямой l_1 при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол $60°$ — пересекает прямую l_3 в точке M. Найдем прообраз точки M при данном повороте. Очевидно, что он принадлежит прямой l_1. Поэтому достаточно отложить от луча OM угол, равный $60°$. **19.34.** *Указание.* Пусть O — данная точка, l_1, l_2 и l_3 — данные прямые. Постройте отрезок AC, серединой которого является точка O, а концы принадлежат прямым l_1 и l_2. Этот отрезок является одной из диагоналей ромба. Найдите точку пересечения прямой l_3 с серединным перпендикуляром отрезка AC. **19.35.** *Указание.* Рассмотрим поворот с центром в точке A против часовой стрелки на угол $90°$. При этом повороте образом отрезка AD будет отрезок AB (см. рисунок). Пусть точка E_1 — образ точки E. Тогда треугольник ABE_1 — образ треугольника ADE. Отсюда $\Delta ABE_1 = \Delta ADE$. Тогда $DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $\angle E_1AB = \angle EAD$. Имеем: $\angle E_1AF = \angle E_1AB + \angle BAF = \angle EAD + \angle FAE = \angle FAD$. Но $\angle FAD = \angle E_1FA$. Следовательно, треугольник AE_1F равнобедренный и $AE_1 = E_1F$. **19.36.** *Указание.* Рассмотрим поворот с центром в точке A по часовой стрелке на угол $60°$ (см. рисунок). При этом повороте образом треугольника ABP будет треугольник ACP_1 (точка P_1 — образ точки P). Отсюда $\angle AP_1C = \angle APB = 150°$. Треугольник APP_1 равносторонний. Тогда $\angle AP_1P = 60°$. Следовательно, $\angle PP_1C = 90°$. Осталось заметить, что $P_1C = PB$ и $PP_1 = AP$. **19.39.** $\frac{120}{7}$ см.



К задаче 19.33



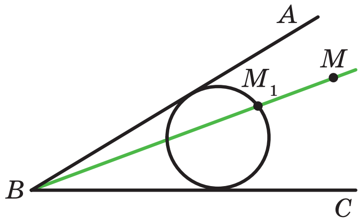
К задаче 19.35



К задаче 19.36

20. Подобие фигур

20.20. 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **20.24.** $\frac{1}{3}$. **20.25.** 12 см. **20.26.** 28,8 см^2. **20.28.** $\frac{S}{16}$. **20.29.** 1) $k=2$, точка B или $k=-2$, точка пересечения диагоналей трапеции $AMNC$. **20.34.** *Указание*. Пусть данная окружность касается прямой a в точке M. Точка M_1 — образ точки M при гомотетии с центром A. Поскольку образом прямой a является сама эта прямая, то точка M_1 принадлежит прямой a. Покажите, что образ данной окружности и прямая a имеют только одну общую точку M_1. **20.35.** $-\frac{1}{2}$. *Указание*. По определению гомотетии $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$. **20.36.** $(-3; 2)$. **20.37.** 1) $x=-3$, $y=8$; 2) $x=12$, $y=-2$. **20.38.** $x=0$, $y=8$. **20.39.** 28 см^2. **20.40.** 20 см^2. **20.41.** 112 см^2. **20.43.** 1) $y=2x+2$; 2) $y=2x-\frac{1}{2}$. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что угловой коэффициент искомой прямой равен 2. **20.44.** 1) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$; 2) $(x-4)^2+(y+8)^2=16$. **20.45.** *Указание*. Прямая A_2B_2 является образом прямой A_1B_1 при гомотетии с центром в точке касания и коэффициентом, равным отношению большего радиуса к меньшему. **20.47.** Окружность, являющаяся образом данной окружности при гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$, за исключением точки A. **20.49.** *Указание*. Треугольник с вершинами в полученных точках является образом треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника при гомотетии с центром M и коэффициентом 2. **20.50.** *Указание*. Постройте произвольный треугольник, два угла которого равны двум данным углам. Опишите около него окружность. Искомый треугольник является образом построенного треугольника при гомотетии с центром в произвольной точке и коэффициентом, равным отношению данного радиуса к радиусу построенной окружности. **20.52.** *Указание*. См. решение задачи 2 п. 20. **20.53.** *Указание*. Рассмотрите гомотетию с центром в середине отрезка AB и коэффициентом $\frac{1}{3}$. **20.54.** Прямая, являющаяся образом прямой l при гомотетии с центром в середине отрезка AB и коэффициентом $\frac{1}{3}$, за исключением точки пересечения прямых AB и l (если такая точка существует). **20.55.** *Указание*. Постройте произвольную окружность, касающуюся сторон угла (см. рисунок). Пусть M_1 — одна из точек пересечения прямой BM с построенной окружностью. Рассмотрите гомотетию с центром в точке B и коэффициентом, равным $\frac{BM}{BM_1}$. Задача имеет два решения. **20.56.** 96 см², 4,8 см. **20.57.** 24.



К задаче 20.55

21. Упражнения для повторения курса геометрии 9 класса

21.1. $2\sqrt{17}$ см или $2\sqrt{41}$ см. **21.2.** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-2}{2\sqrt{21}}$. **21.4.** 9 см, 24 см. **21.5.** 1 см или 2 см. **21.6.** 36 см. **21.7.** 4 см. *Указание.* Поскольку трапеция $ABCK$ является вписанной, то $AB=CK$. Тогда $\angle KAC=\angle AKB$, $AC=BK$. **21.8.** $\frac{9}{16}$; $-\frac{9}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$. **21.9.** $\sqrt{111}$ см. **21.10.** 9,5 см. **21.11.** 12 см. **21.12.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **21.13.** $1:1:\sqrt{3}$. **21.14.** 6 см. **21.15.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. **21.16.** $\frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Указание.* Воспользуйтесь формулой для вычисления площади треугольника по двум сторонам и углу между ними. **21.17.** $4\sqrt{3}$ см². **21.18.** 12 см, $\frac{3}{2}$ см, $\frac{65}{8}$ см. **21.19.** 15 см. **21.20.** 132 см². **21.21.** 450 см². **21.22.** 36 см². **21.24.** $6\sqrt{3}$ см². **21.25.** 1 : 2. **21.26.** $2a\left(2-\sqrt{3}\right)$. **21.27.** 45 см. **21.28.** $\frac{32\pi}{15}$ см. **21.30.** $\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{6}$; $\frac{4}{3}\pi R$. **21.31.** 54°. **21.33.** $\frac{3m}{4}$. **21.34.** $\frac{R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3}$. **21.36.** $(-9;\ 0)$. **21.37.** $(0;\ -2{,}5)$. **21.41.** $(x-7)^2+(y+0{,}5)^2=6{,}25$. **21.42.** Да. **21.43.** Да. **21.44.** $(-1;\ 0)$, $(-9;\ 0)$. **21.45.** 10π. **21.46.** $y=6x+23$. **21.47.** $y=-x+3$. **21.48.** $y=-\frac{5}{3}x-4$. **21.49.** $5x+7y=8$. **21.61.** $-\frac{4}{5}$.

21.62. $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **21.64.** $5x+y=22$. **21.81.** 3 см или $3\sqrt{3}$ см. **21.82.** 3 см^2. **21.83.** 27,5 см^2. **21.84.** $\frac{320}{27}$ см^2. **21.85.** $\frac{25}{16}$ см^2. *Указание*. Треугольник $A_2B_2C_2$ является образом треугольника ABC при гомотетии с коэффициентом $-\frac{5}{4}$ и центром в точке пересечения медиан треугольника ABC.

Ответы к заданиям «Проверьте себя» в тестовой форме

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Г	В	А	Б	А	Г	А	В	Б	Б	Г	Б
2	В	Б	Б	А	А	Г	Г	В	Г	В	Б	А
3	Б	Б	А	В	Б	Г	В	Г	Б	В	Б	А
4	В	Г	А	В	А	А	Б	Г	В	А	Г	В
5	Б	А	Г	В	В	Б	Г	А	В	В	А	Г

Предметный указатель

СОДЕРЖАНИЕ

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

**ГЕОМЕТРІЯ
підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням російською мовою**

(Російською мовою)

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 15,00. Обл.-вид. арк. 14,12.
Тираж 32 922 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Модуль вектора

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, где $(a_1;\ a_2)$ — координаты вектора $\vec{a}$

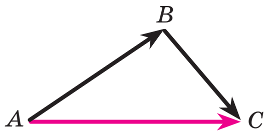
Равенство векторов

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$, то $\vec{a} = \vec{b}$

$\vec{a} = \vec{b}$, если $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$, где $(a_1;\ a_2)$ и $(b_1;\ b_2)$ — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно

Сложение векторов

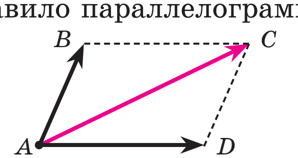
Правило треугольника:



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

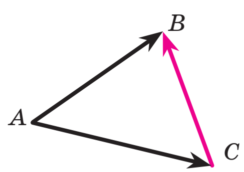
$\vec{a}\,(a_1;\ a_2) + \vec{b}\,(b_1;\ b_2) = \vec{c}\,(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$

Правило параллелограмма:



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Вычитание векторов



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

$\vec{a}\,(a_1;\ a_2) - \vec{b}\,(b_1;\ b_2) = \vec{c}\,(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)$

Умножение вектора на число

Если $\vec{b} = k\vec{a}$, то $\left|\vec{b}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|$,

$\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $k > 0$,

$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $k < 0$

$k\vec{a}\,(a_1;\ a_2) = \vec{b}\,(ka_1;\ ka_2)$

Скалярное произведение векторов

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos \angle BAC$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Печатные буквы		Названия букв
A	a	а
B	b	бэ
C	c	цэ
D	d	дэ
E	e	е
F	f	эф
G	g	же
H	h	аш
I	i	и
J	j	йот
K	k	ка
L	l	эль
M	m	эм
N	n	эн
O	o	о
P	p	пэ
Q	q	ку
R	r	эр
S	s	эс
T	t	тэ
U	u	у
V	v	вэ
W	w	дубль-вэ
X	x	икс
Y	y	игрек
Z	z	зет

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Печатные буквы		Названия букв
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	эпсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	эта
Θ	θ, ϑ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	ламбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	кси
Ο	ο	омикрон
Π	π	пи
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	ипсилон
Φ	φ	фи
Χ	χ	хи
Ψ	ψ	пси
Ω	ω	омега

9 789664 743041